# TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

## TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE DEL PIANO

Per trasformazione geometrica piana si intende una corrispondenza biunivoca fra i punti di un piano, ossia una **funzione biettiva** che associa ad ogni punto P del piano un punto P’ dello stesso piano. Questo significa che tutti gli elementi dell’insieme A hanno un corrispondente in B e tutti gli elementi dell’insieme B sono immagini di un elemento di A. Queste trasformazioni sono lineari perché le relazioni che legano le coordinate di un punto e del suo corrispondente sono espresse da polinomi di primo grado. Le trasformazioni operano sulle figure geometriche e possono cambiare o no le caratteristiche delle figure. Le trasformazioni vengono classificate secondo le proprietà che non cambiano nella trasformazione, dette **proprietà invarianti**.

## TRASFORMAZIONI ISOMETRICHE

Le più semplici trasformazioni geometriche sono le trasformazioni isometriche o isometrie. Si definisce **isometria** una trasformazione del piano che conserva le distanze. Le isometrie si distinguono in **dirette** e **inverse** a seconda che mantengano o no l’orientamento fra i punti.

Sono isometrie dirette:

- Le TRASLAZIONI, che sono trasformazioni in cui i segmenti che uniscono ogni punto al proprio corrispondente sono congruenti, paralleli e concordi.

$$T: \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

- le ROTAZIONI di centro O, che sono trasformazioni in cui rimane fisso il punto O, detto centro di rotazione, e ogni punto P del piano ha per corrispondente un punto $P'$ tale che le distanze $\overline{OP}$ e $\overline{OP'}$ siano uguali e l’angolo $P\hat{O}P'$ sia congruente a un angolo assegnato di ampiezza $\alpha$:

$$\rho: \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

Se l’angolo $\alpha$ è un angolo piatto la rotazione corrispondente è detta *simmetria centrale*, in quanto i punti corrispondenti sono simmetrici rispetto al centro O:

$$\sigma_O \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Sono isometrie inverse le:

simmetrie assiali in cui i punti dell'asse $r$ rimangono fissi e sono detti **punti uniti della trasformazione**. Ogni punto P del piano ha per corrispondente il punto $P'$ tale che r sia asse del segmento P$P'$. Fra queste consideriamo le:

- Simmetrie rispetto all'asse x:

$$\sigma y: \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

- Simmetrie rispetto all'asse y

$$\sigma x: \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

TRASFORMAZIONI NON ISOMETRICHE

Si definiscono trasformazioni non isometriche quelle trasformazioni che non conservano le distanze fra i punti.

SIMILITUDINI

Si definisce similitudine una funzione biettiva del piano in se' tale che, dati due punti P e Q e i loro corrispondenti P' e Q', fra la distanza dei punti P e Q e quella dei loro corrispondenti P' e Q' sussista la relazione:

$\overline{P'Q'}$ = k * $\overline{PQ}$

dove k reale e positivo è detto <u>rapporto di similitudine.</u>

Nelle similitudini ogni distanza è modificata di un fattore costante k.

Se k=1, le distanze rimangono uguali e si ha una isometria ossia le isometrie sono un caso particolare di similitudine.

Fra le più semplici similitudini vi sono le OMOTETIE. Si definisce **omotetia** con centro in un punto O del piano, una trasformazione che soddisfa alle seguenti condizioni:

- al punto O corrisponde se stesso;
- ad ogni punto P diverso da O corrisponde il punto P' allineato con O e P,

  tale che risulti

$\overline{OP'}$ = k * $\overline{OP}$ con k reale positivo

Se k>1, l'omotetia è una dilatazione; se K<1, l'omotetia è una contrazione.

LE TRASFORMAZIONI AFFINI

Fissato un sistema di assi cartesiani (non necessariamente ortogonali), si definisce affinità' una trasformazione del piano in se' tale che ad ogni punto P (x, y) corrisponde un punto P' (x', y') le cui coordinate sono date da:

$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$ con a, b, c, d, e, f $\in$R e det (A) = $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

Le proprietà caratteristiche dell'affinita' sono:

- un'affinita' trasforma rette in rette ;

- un'affinita' trasforma rette parallele in rette parallele e rette incidenti in rette incidenti ;

- in un'affinita' il rapporto fra le aree di due figure corrispondenti è eguale al valore assoluto del determinante della matrice della trasformazione .