# Sistemi lineari

- Nozioni fondamentali
- Il metodo di eliminazione
- Matrici e sistemi lineari
- Sistemi di *n* equazioni in *n* incognite
- Sistemi di *m* equazioni in *n* incognite
- Sistemi lineari parametrici

## Nozioni fondamentali

### 1 Introduzione

In questo capitolo approfondiremo lo studio dei **sistemi lineari**, cioè dei sistemi di equazioni di primo grado, che affronteremo utilizzando le matrici.
Dopo aver rivisitato il metodo di eliminazione alla luce delle nozioni sulle matrici in nostro possesso, studieremo il metodo della matrice inversa per risolvere sistemi di $n$ equazioni in $n$ incognite e rivedremo la regola di Cramer. Infine affronteremo l'importante teorema di Rouché-Capelli, che stabilisce una condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema lineare ammetta soluzioni.

Ricordiamo che si dicono *lineari* le equazioni di primo grado e si dice perciò *lineare* un sistema di equazioni di primo grado.

Un sistema lineare di $m$ equazioni nelle $n$ incognite $x_1, x_2, ..., x_n$ si dice in **forma normale** se è scritto nel modo seguente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

**SAI GIÀ CHE...**

Forma normale di un sistema: i termini con le incognite sono tutti a sinistra del simbolo di uguaglianza e i termini noti a destra.

Le lettere $x_1, x_2, ..., x_n$ indicano le $n$ **incognite** del sistema; i numeri $a_{ij}$ si dicono **coefficienti** delle incognite e i numeri $b_i$ si chiamano **termini noti**.
Scrivendo $a_{ij}$ s'intende che il primo indice $i$ ($i = 1, 2, ..., m$) si riferisce alla $i$-esima equazione e che il secondo indice $j$ ($j = 1, 2, ..., n$) si riferisce alla $j$-esima incognita.
Ad esempio, $a_{23}$ indicherà, nella seconda equazione, il coefficiente della terza incognita (ossia $x_3$).
Il sistema 1 si dice **omogeneo** se i termini noti sono tutti nulli: $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$.
Un sistema omogeneo assume dunque la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Se invece almeno uno dei termini $b_i$ risulta diverso da zero, il sistema si dirà **non omogeneo**.


© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

## 2 Definizioni principali

**DEFINIZIONE** SOLUZIONE DEL SISTEMA

Una $n$-pla ordinata di numeri reali $(c_1;\ c_2;\ \dots;\ c_n)$ è **soluzione del sistema**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

se le $m$ equazioni del sistema risultano contemporaneamente verificate quando si operino in esse le sostituzioni: $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \ \dots, x_n = c_n$.

**DEFINIZIONI** SISTEMA POSSIBILE, SISTEMA IMPOSSIBILE

Un sistema lineare si dice **possibile** e le sue equazioni si dicono *compatibili* se esso ammette almeno una soluzione; si dice **impossibile** e le sue equazioni si dicono *incompatibili* se esso non ammette alcuna soluzione.

**DEFINIZIONI** SISTEMA DETERMINATO, SISTEMA INDETERMINATO

Un sistema lineare possibile è **determinato** se ha una sola soluzione, è **indeterminato** se ha infinite soluzioni.

Si potrebbe dimostrare che non vi sono altre possibilità: un sistema lineare non può avere un numero di soluzioni finito maggiore di uno.
È immediato verificare che ogni sistema omogeneo ammette sempre almeno la soluzione

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

detta *soluzione nulla*.
Dunque *i sistemi omogenei sono sempre possibili*.
Introduciamo ora un'importante definizione che utilizzeremo spesso in seguito.

**DEFINIZIONE** COMBINAZIONE LINEARE DI EQUAZIONI

Si dice **combinazione lineare di due equazioni** ogni equazione che si ottiene sommando membro a membro le due equazioni date, dopo aver eventualmente moltiplicato entrambi i membri di ciascuna di esse per un opportuno numero diverso da zero.
I due numeri per cui si moltiplicano entrambi i membri delle due equazioni si dicono *coefficienti* della combinazione lineare.

Infine, consideriamo il principio di riduzione, che già conosciamo e su cui si basa il metodo di eliminazione, di cui parleremo nel PARAGRAFO 3.
Vista la definizione di combinazione lineare, il principio di riduzione può essere riformulato così:

**Sostituendo una combinazione lineare di due equazioni di un sistema al posto di una di esse, si ottiene un sistema equivalente al sistema dato.**

**SAI GIÀ CHE...**

Il principio di riduzione afferma che, dato un sistema di due equazioni in due incognite, se a un'equazione si sostituisce l'equazione che si ottiene sommando o sottraendo membro a membro le due equazioni date, si ottiene un sistema equivalente a quello dato.


© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

# Il metodo di eliminazione

## 3 Definizione e applicazione

Il **metodo di eliminazione** consiste essenzialmente nel procedimento seguente:

**Applicando ripetutamente il principio di riduzione, si cerca di eliminare la prima incognita da tutte le equazioni, eccetto che dalla prima; si cerca poi di eliminare la seconda incognita da tutte le equazioni eccetto che dalla seconda; ...**

Per simboleggiare il passaggio che consiste nel sostituire una combinazione lineare di due equazioni al posto di una di esse, scriveremo, a sinistra della parentesi graffa, il numero per cui si moltiplicano entrambi i membri di ciascuna delle equazioni considerate; sotto al sistema tracceremo una linea sotto la quale scriveremo la combinazione lineare così formata.

**ESEMPIO**

**1** Risolviamo il seguente sistema di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x + 2z = -1 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \qquad \boxed{1}$$

Cominciamo con l'eliminare la prima incognita, ossia la $x$, da tutte le equazioni tranne la prima (cioè in questo caso solo dalla seconda equazione). Per far ciò sostituiremo al posto della seconda equazione una combinazione lineare delle prime due equazioni e, per il principio di riduzione, il nuovo sistema risulterà equivalente al sistema $\boxed{1}$.

Affinché nella combinazione lineare non figuri l'incognita $x$, dovremo far in modo che i coefficienti di $x$, nelle due prime equazioni date, risultino opposti.

Osserviamo che i coefficienti della $x$ nella prima e nella seconda equazione sono rispettivamente 2 e 3, ed è m.c.m. (2 ; 3) = 6. Moltiplicando per 3 entrambi i membri della prima equazione e per $-2$ entrambi i membri della seconda, tali coefficienti divengono $3 \cdot 2 = 6$ e $-2 \cdot 3 = -6$; perciò, sommando membro a membro le due equazioni così ottenute, si elideranno i termini contenenti la $x$. Sostituiamo perciò al posto della seconda equazione la combinazione della prima e della seconda equazione secondo i coefficienti 3 e $-2$ (si osservi che avremmo potuto scegliere anche i coefficienti $-3$ e 2):

$$\begin{array}{r} 3 \\ -2 \\ \\ \hline \end{array}\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x + 2z = -1 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$// \quad 3y - 4z = 11$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3y - 4z = 11 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

Procediamo nello stesso modo, eliminando prima la $y$ da tutte le equazioni eccetto che dalla seconda e, dopo, eliminando la $z$ da tutte le equazioni eccetto che dalla terza:

$$\begin{array}{r} 3 \\ -1 \\ \\ \end{array}\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3y - 4z = 11 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$6x \quad // \quad + 4z = -2$$

$$\begin{array}{r} \\ -2 \\ 3 \end{array}\begin{cases} 3x + 2z = -1 \\ 3y - 4z = 11 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$// \quad +11z = -22$$

$$\begin{cases} 3x + 2z = -1 \\ 3y - 4z = 11 \\ z = -2 \end{cases} \qquad \boxed{2}$$



© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

A questo punto si potrebbe facilmente risolvere il sistema $\boxed{2}$ sostituendo $z = -2$ nella prima e seconda equazione; invece, al fine di completare l'esposizione del metodo, noi continueremo nella sua applicazione:

$$\begin{array}{r} 1 \\ \\ -2 \end{array}\begin{cases} 3x \qquad + 2z = -1 \\ \qquad 3y - 4z = 11 \\ \qquad\qquad z = -2 \end{cases}$$
$$3x \qquad // = 3$$

$$\begin{array}{r} \\ 1 \\ 4 \end{array}\begin{cases} x \qquad\qquad = 1 \\ \quad 3y - 4z = 11 \\ \qquad\qquad z = -2 \end{cases}$$
$$3y \quad // = 3$$

$$\begin{cases} x = \ \ 1 \\ y = \ \ 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

Il sistema ottenuto è equivalente al sistema $\boxed{1}$, perché è stato ottenuto da esso mediante ripetute applicazioni del principio di riduzione.
Perciò anche il sistema $\boxed{1}$ è determinato e la terna ordinata $(1\ ;\ 1\ ;\ -2)$ ne è la soluzione.

Applicando il metodo di eliminazione si possono presentare le seguenti situazioni.

1. Nella prima equazione può non comparire la prima incognita, oppure nella seconda equazione può non comparire la seconda incognita, ... In tal caso è sufficiente scambiare di posto l'equazione considerata con una *sottostante* contenente l'incognita che interessa, oppure, se in nessuna delle equazioni sottostanti compare tale incognita, si sposta tale incognita all'ultimo posto in tutte le equazioni che la contengono.

2. Nel corso dei calcoli una delle equazioni del sistema può assumere la forma di un'uguaglianza del tipo $0 = 1$ o un'altra forma impossibile, oppure due equazioni del sistema si rivelano palesemente incompatibili. In tal caso il sistema dato risulta impossibile e non v'è motivo di proseguire i calcoli.

3. Nel corso dei calcoli una delle equazioni del sistema può assumere la forma di un'identità del tipo $0 = 0$ o un'altra forma equivalente; tale equazione può allora essere trascurata, eliminandola dal sistema. Analogamente possono comparire due o più equazioni formalmente identiche o palesemente equivalenti: in tal caso si potranno trascurare tutte queste equazioni tranne una, eliminandole dal sistema.

Prima di completare l'esposizione del metodo d'eliminazione, illustriamo quanto detto con alcuni esempi. Osserviamo che nel risolvere i sistemi è molto utile, per la chiarezza dei calcoli, incolonnare le incognite di ugual nome che compaiono nelle varie equazioni.

**ESEMPIO**

**2** Risolviamo il seguente sistema di quattro equazioni in cinque incognite:

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 + \ \ x_5 = 1 \\ 3x_1 - \ \ x_2 + 3x_3 - \ \ x_4 - \ \ x_5 = 2 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 5x_5 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 1 \end{cases}$$

Si ha

$$\begin{array}{r} 3 \\ -1 \\ \\ \\ \end{array}\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 + \ \ x_5 = 1 \\ 3x_1 - \ \ x_2 + 3x_3 - \ \ x_4 - \ \ x_5 = 2 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 5x_5 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 1 \end{cases}$$
$$// \quad 4x_2 \quad // \quad + 4x_4 + 4x_5 = 1$$



© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

$$\begin{array}{r} 3 \\ \\ -1 \\ \\ \end{array}\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 + \ \ x_5 = 1 \\ \quad 4x_2 \qquad\quad + 4x_4 + 4x_5 = 1 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 5x_5 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 1 \end{cases}$$

$$// \quad 8x_2 \ // \quad + 8x_4 + 8x_5 = 2$$

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + x_3 + \ \ x_5 = 1 \\ \quad 4x_2 \qquad + 4x_4 + 4x_5 = 1 \\ \quad 8x_2 \qquad + 8x_4 + 8x_5 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 1 \end{cases}$$

La seconda e la terza equazione sono equivalenti: infatti la terza si ottiene dalla seconda moltiplicandone per 2 entrambi i membri. Possiamo quindi eliminare una di queste due equazioni, per esempio la terza.

$$\begin{array}{r} 1 \\ \\ 1 \end{array}\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + x_3 + \ \ x_4 + \ \ x_5 = 1 \\ \quad 4x_2 \qquad + 4x_4 + 4x_5 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \ \ x_4 + \ \ x_5 = 1 \\ \quad 4x_2 \qquad + 4x_4 + 4x_5 = 1 \\ \quad 4x_2 \qquad + 4x_4 + 4x_5 = 2 \end{cases}$$

$$// \quad 4x_2 \ // \quad + 4x_4 + 4x_5 = 2$$

La seconda e la terza equazione sono evidentemente incompatibili: il sistema è quindi impossibile.

## 4 Sistemi determinati e indeterminati

Completiamo ora l'esposizione del metodo di eliminazione, esaminando i casi che si possono presentare quando l'applicazione del procedimento esposto è terminata perché non ci sono più equazioni da cui poter eliminare altre incognite.
Se il sistema non si è rivelato impossibile, si possono presentare i due seguenti casi.

**A** In ogni equazione compare una sola incognita e il numero delle equazioni rimaste è uguale al numero delle incognite del sistema (**ESEMPIO 1** del **PARAGRAFO 3**).
In tal caso il **sistema** è **determinato**.

**B** In almeno un'equazione compaiono due o più incognite e il numero $r$ delle equazioni rimaste è minore del numero $n$ delle incognite.
In tal caso il **sistema** è **indeterminato**. Infatti, posto $k = n - r$, attribuendo alle incognite $x_{r+1}$, $x_{r+2}$, ..., $x_n$ valori arbitrari come, per esempio,

$$x_{r+1} = p_1, \quad x_{r+2} = p_2, \quad ..., \quad x_n = p_k \tag{3}$$

il sistema si può risolvere rispetto alle restanti incognite $x_1$, $x_2$, ..., $x_r$. I valori così trovati, insieme ai valori (3) arbitrariamente attribuiti, costituiscono una soluzione del sistema dato.
Se ora, invece di sostituire al posto di $x_{r+1}$, ..., $x_n$ dei numeri arbitrari lasciamo indicate le lettere $p_1$, ..., $p_k$ (*parametri*) otteniamo la **soluzione generale** del sistema dato. Ciò significa che le soluzioni del sistema dato sono tutte quelle che si possono ottenere dal sistema attribuendo ai parametri $p_1$, ..., $p_k$ dei valori arbitrari. Poiché vi sono infiniti modi di attribuire un valore arbitrario a ciascuno di questi $k$ parametri, si dice che il sistema ha $\infty^k$ soluzioni.

**ESEMPIO**

Risolviamo il seguente sistema di quattro equazioni in quattro incognite:

$$\begin{cases} x_1 + 9x_2 + 13x_3 + 2x_4 = 17 \\ \quad 2x_2 + \ \ 3x_3 \qquad\quad = \ \ 4 \\ x_1 + 5x_2 + \ \ 7x_3 + 2x_4 = \ \ 9 \\ x_1 + 3x_2 + \ \ 4x_3 + 2x_4 = \ \ 5 \end{cases} \tag{4}$$


© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

Eliminiamo l'incognita $x_1$ da tutte le equazioni eccetto che dalla prima:

$$\begin{array}{r} 1 \\ \\ -1 \\ \\ \end{array}\left\{\begin{array}{l} x_1 + 9x_2 + 13x_3 + 2x_4 = 17 \\ \quad 2x_2 + 3x_3 \quad = 4 \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 9 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 5 \end{array}\right. \longrightarrow$$

$$\overline{/\!/ \quad 4x_2 + 6x_3 \quad /\!/ = 8}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \\ \\ -1 \end{array}\longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x_1 + 9x_2 + 13x_3 + 2x_4 = 17 \\ \quad 2x_2 + 3x_3 \quad = 4 \\ \quad 2x_2 + 3x_3 \quad = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 5 \end{array}\right. \longrightarrow$$

$$\overline{/\!/ \quad 6x_2 + 9x_3 \quad /\!/ = 12}$$

$$\longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x_1 + 9x_2 + 13x_3 + 2x_4 = 17 \\ \quad 2x_2 + 3x_3 \quad = 4 \\ \quad 2x_2 + 3x_3 \quad = 4 \\ \quad 2x_2 + 3x_3 \quad = 4 \end{array}\right.$$

Nel sistema ottenuto vi sono tre equazioni formalmente identiche: possiamo perciò trascurarne due; eliminiamo poi l'incognita $x_2$ dalla prima equazione del nuovo sistema così ottenuto

$$\begin{array}{r} 2 \\ -9 \end{array}\left\{\begin{array}{l} x_1 + 9x_2 + 13x_3 + 2x_4 = 17 \\ \quad 2x_2 + 3x_3 \quad = 4 \end{array}\right. \longrightarrow$$

$$\overline{2x_1 \quad /\!/ \quad - \quad x_3 + 4x_4 = -2}$$

$$\longrightarrow\left\{\begin{array}{l} 2x_1 \quad - x_3 + 4x_4 = -2 \\ \quad 2x_2 + 3x_3 \quad = 4 \end{array}\right. \qquad \boxed{5}$$

L'applicazione del metodo d'eliminazione esposto al paragrafo precedente è terminata. Abbiamo ottenuto un sistema in ciascuna delle cui equazioni compare più di un'incognita (caso **B**). Il sistema è perciò indeterminato. Per ricavare l'espressione generale delle soluzioni del sistema $\boxed{4}$ poniamo perciò $x_3 = p_1$ e $x_4 = p_2$ nell'ultimo dei sistemi $\boxed{5}$, che risolviamo poi rispetto a $x_1$ e $x_2$:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 \quad - p_1 + 4p_2 = -2 \\ \quad 2x_2 + 3p_1 \quad = 4 \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{p_1 - 4p_2 - 2}{2} \\ x_2 = \dfrac{4 - 3p_1}{2} \end{array}\right.$$

L'espressione generale delle soluzioni del sistema $\boxed{4}$ è perciò

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{p_1 - 4p_2 - 2}{2} \\ x_2 = \dfrac{4 - 3p_1}{2} \\ x_3 = p_1 \\ x_4 = p_2 \end{array}\right. \qquad \boxed{6}$$

Il significato delle $\boxed{6}$ è il seguente: comunque si attribuiscano a $p_1$ e $p_2$ dei valori arbitrari, i corrispondenti valori di $x_1, x_2, x_3, x_4$ costituiscono una soluzione del sistema $\boxed{4}$. Ad esempio, se si pone $p_1 = p_2 = 0$, dalle $\boxed{6}$ si ottiene $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = x_4 = 0$; se invece si assume $p_1 = 2$, $p_2 = -1$ si ottiene $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -1$; ... Viceversa, ogni soluzione del sistema $\boxed{4}$ si può ottenere dalle $\boxed{6}$ con opportuni valori di $p_1$ e $p_2$. Per tale motivo si dice che le $\boxed{6}$ esprimono la soluzione generale del sistema $\boxed{4}$. Inoltre, poiché tale soluzione generale è espressa mediante 2 parametri, ognuno dei quali può assumere infiniti valori, si dice che il sistema ha $\infty^2$ soluzioni.



© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

**OSSERVAZIONI**

Il precedente esempio ci offre lo spunto per alcune importanti osservazioni.

1. L'introduzione di parametri non è strettamente necessaria; avremmo potuto trattare direttamente $x_3$ e $x_4$ come parametri, risolvendo le $\boxed{5}$ rispetto alle incognite $x_1$ e $x_2$.

   Si sarebbero ottenute le equazioni

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_3 - 4x_4 - 2}{2} \\ x_2 = \dfrac{4 - 3x_3}{2} \end{cases} \qquad \boxed{7}$$

   che esprimono, più sinteticamente delle $\boxed{6}$, la soluzione generale del sistema $\boxed{4}$.

2. La scelta delle variabili da trattare come incognite e di quelle da trattare come parametri in generale non è unica, ma ciò non significa che tale scelta sia del tutto arbitraria. Ad esempio, il sistema $\boxed{4}$ non può essere risolto rispetto alle incognite $x_1$ e $x_4$. Ritorneremo su tale problema nei prossimi paragrafi; per il momento si tenga presente che l'applicazione del metodo di eliminazione, così come l'abbiamo esposto, conduce a una corretta scelta delle variabili da trattare come incognite.

# Matrici e sistemi lineari

## 5 Applicazione del metodo di eliminazione alla matrice associata a un sistema

Consideriamo un generico sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite, scritto in forma normale:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \boxed{1}$$

La seguente tabella formata dai coefficienti e dai termini noti del sistema $\boxed{1}$, disposti in $m$ righe e $n+1$ colonne, come vedremo meglio nei prossimi paragrafi, si chiama **matrice completa del sistema**:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

In pratica, in tale tabella ogni riga corrisponde a un'equazione del sistema, ognuna delle prime $n$ colonne corrisponde a un'incognita e nell'ultima colonna si trovano i termini noti.
In ogni riga si trovano dunque i coefficienti delle incognite dell'equazione corrispondente e, precisamente, al primo posto si trova il coefficiente della prima incognita, al secondo posto il coefficiente della seconda incognita, ..., mentre all'ultimo posto compare il termine noto.
Se in qualche equazione non compare qualche incognita, gli elementi corrispondenti della matrice del sistema saranno uguali a zero.
È importante notare che, nella risoluzione di un sistema lineare, si opera solo sui coefficienti delle incognite e sui termini noti, mentre le incognite non svolgono altro ruolo che quello di inerti "segnaposto". Questa osservazione suggerisce l'idea di risolvere un sistema operando sulla sua matrice anziché sul sistema stesso.
Premettiamo che per *combinazione lineare di due righe* di una matrice intendiamo una riga che si ottiene moltiplicando tutti gli elementi di una delle due righe per uno stesso numero diverso da zero, moltiplicando tutti gli elementi dell'altra riga per uno stesso numero diverso dal precedente e da zero e sommando gli elementi corrispondenti delle due righe così modificate.


© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

Vediamo dunque, con un esempio, come le operazioni su un sistema lineare equivalgano a operazioni sulla sua matrice. Scriviamo, su due colonne, a sinistra il sistema e a destra la sua matrice, intestandone le colonne con i simboli delle relative incognite (vedi il successivo punto **4.**).

$$\begin{cases} 7x + 6y + 5z = 5 \\ 3x + 4y + 2z = 1 \\ 5x + 6y + 4z = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Cerchiamo di rendere nulli i coefficienti di $x$ in tutte le equazioni tranne la prima. Formiamo una combinazione lineare della prima e della seconda equazione secondo i coefficienti $-3$ e $7$ e sostituiamola alla seconda equazione; formiamo poi una combinazione lineare della prima e della terza equazione, secondo i coefficienti $-5$ e $7$, e sostituiamola alla terza equazione:

$$\begin{array}{r} -3 \\ 7 \\ \\ \end{array} \begin{cases} 7x + 6y + 5z = 5 \\ 3x + 4y + 2z = 1 \\ 5x + 6y + 4z = 1 \end{cases}$$
$$\overline{\quad // \quad 10y - z = -8 \quad}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{r} -5 \\ \\ 7 \end{array} \begin{cases} 7x + 6y + 5z = 5 \\ 10y - z = -8 \\ 5x + 6y + 4z = 1 \end{cases}$$
$$\overline{\quad // \quad 12y + 3z = -18 \quad}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} 7x + 6y + 5z = 5 \\ 10y - z = -8 \\ 12y + 3z = -18 \end{cases}$$

Semplifichiamo la terza equazione dividendone entrambi i membri per 3:

$$\begin{cases} 7x + 6y + 5z = 5 \\ 10y - z = -8 \\ 4y + z = -6 \end{cases}$$

| x | y | z | termini noti |
|---|---|---|---|
| 7 | 6 | 5 | 5 |
| 3 | 4 | 2 | 1 |
| 5 | 6 | 4 | 1 |

Cerchiamo di rendere nulli tutti gli elementi della prima colonna eccetto quello della prima riga. Formiamo una combinazione lineare della prima e della terza riga secondo i coefficienti $-3$ e $7$, e sostituiamola alla seconda riga; formiamo poi una combinazione lineare della prima e della terza riga, secondo i coefficienti $-5$ e $7$, e sostituiamola alla terza riga:

| | x | y | z | termini noti |
|---|---|---|---|---|
| −3 | 7 | 6 | 5 | 5 |
| 7 | 3 | 4 | 2 | 1 |
| | 5 | 6 | 4 | 1 |
| | 0 | 10 | −1 | −8 |

↓

| | x | y | z | termini noti |
|---|---|---|---|---|
| −5 | 7 | 6 | 5 | 5 |
| | 0 | 10 | −1 | −8 |
| 7 | 5 | 6 | 4 | 1 |
| | 0 | 12 | 3 | −18 |

↓

| x | y | z | termini noti |
|---|---|---|---|
| 7 | 6 | 5 | 5 |
| 0 | 10 | −1 | −8 |
| 0 | 12 | 3 | −18 |

Dividiamo per 3 ciascun elemento della terza riga

| x | y | z | termini noti |
|---|---|---|---|
| 7 | 6 | 5 | 5 |
| 0 | 10 | −1 | −8 |
| 0 | 4 | 1 | −6 |

Come si vede, tutte le operazioni che, eseguite su un sistema lineare, lo trasformano in un altro a esso equivalente, corrispondono a operazioni eseguibili direttamente sulla matrice del sistema.

È quindi possibile, nella matrice del sistema,

1. **moltiplicare o dividere tutti gli elementi di una riga per una stessa costante diversa da zero**; *ciò infatti equivale a moltiplicare o dividere entrambi i membri della corrispondente equazione per una stessa costante non nulla;*
2. **sostituire la combinazione lineare di due righe al posto di una di esse**; *ciò infatti equivale a sostituire la combinazione lineare di due equazioni al posto di una di esse;*


© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

3. **cambiare l'ordine delle righe della matrice**, *perché ciò equivale a mutare l'ordine delle equazioni del sistema dato;*
4. **cambiare l'ordine delle colonne della matrice**, eccetto l'ultima (colonna dei termini noti), *perché ciò equivale a mutare l'ordine delle incognite del sistema.*

Le intestazioni delle colonne della matrice permetteranno di riconoscere l'ordine in cui si trovano le incognite. Si deve inoltre ricordare che, se eseguendo le operazioni descritte compare nella matrice una riga nulla, cioè formata da soli zero, essa si può trascurare, eliminandola dalla matrice. Infatti tale riga corrisponde a una equazione nella forma $0 = 0$, che è identicamente soddisfatta. Invece una riga i cui elementi sono tutti nulli, eccetto l'ultimo, equivale a una equazione impossibile del tipo $0 = b$, con $b \neq 0$. La comparsa di una tale riga sta a indicare che l'intero sistema è impossibile.

**ESEMPI**

**1** Riprendiamo il sistema $\boxed{2}$ o, meglio, la relativa matrice, al punto in cui l'avevamo lasciata:

| $x$ | $y$ | $z$ | termini noti |
|---|---|---|---|
| 7 | 6 | 5 | 5 |
| 0 | 10 | −1 | −8 |
| 0 | 4 | 1 | −6 |

Cerchiamo di rendere nulli tutti gli elementi della seconda colonna eccetto il secondo (nelle seguenti tabelle, t.n. indica i termini noti).

| | $x$ | $y$ | $z$ | t.n. |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 7 | 6 | 5 | 5 |
| −3 | 0 | 10 | −1 | −8 |
| | 0 | 4 | 1 | −6 |
| | 35 | 0 | 28 | 49 |

$\longrightarrow$

| | $x$ | $y$ | $z$ | t.n. |
|---|---|---|---|---|
| | 35 | 0 | 28 | 49 |
| −2 | 0 | 10 | −1 | −8 |
| 5 | 0 | 4 | 1 | −6 |
| | 0 | 0 | 7 | −14 |

$\longrightarrow$

| $x$ | $y$ | $z$ | t.n. |
|---|---|---|---|
| 35 | 0 | 28 | 49 |
| 0 | 10 | −1 | −8 |
| 0 | 0 | 7 | −14 |

Semplifichiamo la prima e la terza riga dividendone tutti gli elementi per 7 e, successivamente, rendiamo nulli tutti gli elementi della terza colonna eccetto il terzo:

| | $x$ | $y$ | $z$ | t.n. |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 0 | 5 | 7 |
| | 0 | 10 | −1 | −8 |
| −4 | 0 | 0 | 1 | −2 |
| | 5 | 0 | 0 | 15 |

$\longrightarrow$

| | $x$ | $y$ | $z$ | t.n. |
|---|---|---|---|---|
| | 5 | 0 | 0 | 15 |
| 1 | 0 | 10 | −1 | −8 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | −2 |
| | 0 | 10 | 0 | −10 |

$\longrightarrow$

| $x$ | $y$ | $z$ | t.n. |
|---|---|---|---|
| 5 | 0 | 0 | 15 |
| 0 | 10 | 0 | −10 |
| 0 | 0 | 1 | −2 |

Dividiamo per 5 tutti gli elementi della prima riga e per 10 tutti gli elementi della seconda riga:

| $x$ | $y$ | $z$ | t.n. |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 3 |
| 0 | 1 | 0 | −1 |
| 0 | 0 | 1 | −2 |

$\boxed{3}$

I numeri che costituiscono la quarta colonna della matrice $\boxed{3}$ sono la terna che è soluzione del sistema $\boxed{2}$. Infatti la matrice $\boxed{3}$ corrisponde al sistema seguente:

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 3 \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = -1 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = -2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = -2 \end{cases} \qquad \boxed{3}$$

Il sistema $\boxed{4}$ è equivalente al sistema $\boxed{2}$, che pertanto è determinato, e ne esprime la soluzione.



© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

**2** Risolviamo il seguente sistema

$$\begin{cases} \phantom{x_1 + 3x_2 + {}} 3x_3 - 2x_4 - \phantom{1}5x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 - 10x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 - \phantom{1}5x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 6x_4 - 15x_5 = 0 \end{cases} \qquad \boxed{5}$$

Si tratta di un sistema *omogeneo* di quattro equazioni con cinque incognite. Il sistema $\boxed{5}$ è dunque possibile, ammettendo almeno la soluzione nulla $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ (vedi **PARAGRAFO 2**).
Risolviamolo con il metodo di eliminazione, per sapere se tale sistema è determinato (nel qual caso la soluzione nulla sarà l'unica) o indeterminato (nel qual caso si dovrà trovare un'espressione generale delle soluzioni).
Scriviamo la matrice corrispondente al sistema $\boxed{5}$:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | t.n. |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 3 | −2 | −5 | 0 |
| 1 | 3 | 5 | −4 | −10 | 0 |
| 1 | 3 | 2 | −2 | −5 | 0 |
| 2 | 6 | 7 | −6 | −15 | 0 |

Cominciamo con l'osservare che nella prima riga è nullo il primo elemento (ossia nella prima equazione non compare la prima incognita). Per poter applicare il metodo di eliminazione è allora necessario scambiare tra loro prima e seconda riga. Fatto ciò, procediamo rendendo nulli tutti gli elementi della prima colonna eccetto il primo.

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | t.n. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 5 | −4 | −10 | 0 |
| | 0 | 0 | 3 | −2 | −5 | 0 |
| −1 | 1 | 3 | 2 | −2 | −5 | 0 |
| | 2 | 6 | 7 | −6 | −15 | 0 |
| | 0 | 0 | 3 | −2 | −5 | 0 |

$\longrightarrow$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | t.n. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| −2 | 1 | 3 | 5 | −4 | −10 | 0 |
| | 0 | 0 | 3 | −2 | −5 | 0 |
| | 0 | 0 | 3 | −2 | −5 | 0 |
| 1 | 2 | 6 | 7 | −6 | −15 | 0 |
| | 0 | 0 | −3 | 2 | 5 | 0 |

$\longrightarrow$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | t.n. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | −4 | −10 | 0 |
| 0 | 0 | 3 | −2 | −5 | 0 |
| 0 | 0 | 3 | −2 | −5 | 0 |
| 0 | 0 | −3 | 2 | 5 | 0 |

La seconda e la terza riga sono identiche, mentre gli elementi della quarta sono gli opposti dei corrispondenti elementi della seconda e della terza riga. Tali righe rappresentano quindi tre equazioni equivalenti; possiamo perciò eliminarne due, ad esempio la terza e la quarta. Nella tabella così ottenuta sono nulli il primo e il secondo elemento della seconda riga; per procedere scambiamo tra loro la seconda e terza colonna.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | t.n. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | −4 | −10 | 0 |
| 0 | 0 | 3 | −2 | −5 | 0 |

$\longrightarrow$

| $x_1$ | $x_3$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_5$ | t.n. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 3 | −4 | −10 | 0 |
| 0 | 3 | 0 | −2 | −5 | 0 |

Non ci resta ora che rendere nullo il secondo elemento della prima riga:

| | $x_1$ | $x_3$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_5$ | t.n. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 5 | 3 | −4 | −10 | 0 |
| −5 | 0 | 3 | 0 | −2 | −5 | 0 |
| | 3 | 0 | 9 | −2 | −5 | 0 |

$\longrightarrow$

| $x_1$ | $x_3$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_5$ | t.n. |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 9 | −2 | −5 | 0 |
| 0 | 3 | 0 | −2 | −5 | 0 |

La tabella ottenuta rappresenta il sistema $\begin{cases} 3x_1 + \phantom{3x_3 +{}} 9x_2 - 2x_4 - 5x_5 = 0 \\ \phantom{3x_1 + {}} 3x_3 \phantom{{}+ 9x_2} - 2x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$

che equivale al sistema $\boxed{5}$. Per risolverlo questa volta non introdurremo nuovi parametri, ma tratteremo le variabili $x_1$ e $x_3$ come incognite e $x_2, x_4, x_5$ come parametri; otteniamo

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-9x_2 + 2x_4 + 5x_5}{3} \\ x_3 = \dfrac{2x_4 + 5x_5}{3} \end{cases} \qquad \boxed{6}$$

Il sistema $\boxed{6}$ esprime la soluzione generale del sistema $\boxed{5}$, che quindi è indeterminato e ammette $\infty^3$ soluzioni.



© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

## 6 Forma matriciale di un sistema lineare

Consideriamo un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \boxed{7}$$

La matrice di tipo $(m,\ n)$ $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

si chiama **matrice dei coefficienti** o **matrice incompleta** del sistema, mentre le due matrici colonna, rispettivamente di tipo $(n,\ 1)$ e $(m,\ 1)$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

si chiamano, rispettivamente, **matrice colonna delle incognite** e **matrice colonna dei termini noti**.

La matrice di tipo $(m,\ n+1)$

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

ottenuta dalla matrice $A$ dei coefficienti aggiungendovi, come ultima colonna, la matrice colonna dei termini noti, è detta, come già sappiamo, **matrice completa** del sistema.

Ricordando la definizione di prodotto tra matrici, e osservando che le matrici $A$ e $X$ sono conformabili rispetto al prodotto, notiamo che il sistema $\boxed{7}$ può essere riscritto, in **forma matriciale**, nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ovvero, in forma compatta,

$$A \cdot X = B$$

**ESEMPIO**

Consideriamo il seguente sistema di tre equazioni nelle quattro incognite $x$, $y$, $z$, $w$:

$$\begin{cases} 7x + 5y - 3z + 2w = -1 \\ -3x + 2z - w = 5 \\ 2y + 6z - 8w = -3 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 & -3 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & -8 \end{bmatrix}$


© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

La matrice colonna delle incognite e la matrice colonna dei termini noti sono, rispettivamente,

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

La matrice completa del sistema è $$A' = \begin{bmatrix} 7 & 5 & -3 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & -8 & -3 \end{bmatrix}$$

In forma matriciale, il sistema dato si scrive nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 & -3 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

# Sistemi di *n* equazioni in *n* incognite

## 7 Metodo della matrice inversa

Consideriamo il sistema 7 del paragrafo precedente, nel caso particolare in cui sia $m = n$, ossia nel caso in cui il numero delle equazioni sia uguale al numero delle incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

In forma matriciale, tale sistema sarà

$$A \cdot X = B \tag{2}$$

La matrice dei coefficienti del sistema risulta quadrata. Supponiamo inoltre che il suo determinante non sia nullo, sia cioè

$$|A| \neq 0$$

e quindi esista la matrice inversa $A^{-1}$.

**NOTA BENE**

Come vedremo, se è $|A| = 0$ il sistema può essere impossibile o indeterminato.

Vogliamo dimostrare che, sotto tali ipotesi, il sistema è possibile e determinato e la sua soluzione è data da

$$X = A^{-1} \cdot B \tag{3}$$

**Dimostrazione**

Sostituendo nella 2, al posto di $X$, l'espressione data dalla 3, si ha

$$A \cdot (A^{-1} \cdot B) = B$$

che, per la proprietà associativa del prodotto tra matrici, può scriversi

$$(A \cdot A^{-1}) \cdot B = B$$

Da questa relazione, per le proprietà della matrice inversa e della matrice unità, si ottiene un'identità che verifica la 2:

$$I \cdot B = B \quad \longrightarrow \quad B = B$$



© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

Quindi il sistema dato ammette almeno una soluzione ed è perciò possibile. Dimostriamo ora che il sistema è determinato, cioè che non ammette altra soluzione oltre alla **3**. Se vi fosse un'altra soluzione, $X_1 \neq A^{-1} \cdot B$, si avrebbe

$$A \cdot X_1 = B$$

Moltiplicando a sinistra per $A^{-1}$ entrambi i membri di tale uguaglianza, otteniamo:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X_1) = A^{-1} \cdot B \longrightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X_1 = A^{-1} \cdot B \longrightarrow I \cdot X_1 = A^{-1} \cdot B \longrightarrow X_1 = A^{-1} \cdot B$$

contro l'ipotesi $X_1 \neq A^{-1} \cdot B$. c.v.d.

**OSSERVAZIONE**

Il risultato ora ottenuto ci permette di affermare che la condizione $|A| \neq 0$ è *sufficiente* affinché il sistema sia possibile e determinato.
La matrice $A^{-1} \cdot B$, che per la **3** è uguale a $X$, risulta una matrice colonna di tipo $(n,\ 1)$. Gli elementi di $A^{-1}B$ ci forniscono i valori cercati di $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cioè l'unica soluzione del sistema dato.

**ESEMPIO**

Vogliamo risolvere il sistema $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ -x + 3y + z = 0 \\ x + y + 2z = -11 \end{cases}$

La matrice inversa della matrice dei coefficienti di tale sistema si determina con il metodo esposto nel capitolo sulle matrici. Si ottiene quindi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{11} & -\frac{4}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \\ -\frac{4}{11} & \frac{1}{11} & \frac{5}{11} \end{bmatrix}$$

Quindi, applicando la **3** ed eseguendo poi il prodotto, si ottiene

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{11} & -\frac{4}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \\ -\frac{4}{11} & \frac{1}{11} & \frac{5}{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ -11 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -9 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = -9 \end{cases}$$

**SAI GIÀ CHE...**

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{bmatrix}$$

dove $A_{ik}$ è il complemento algebrico dell'elemento $a_{ik}$, ossia è il determinante moltiplicato per $(-1)^{i+k}$ della matrice che si ottiene sopprimendo la riga e la colonna di quell'elemento.

## 8 Regola di Cramer

Il metodo della matrice inversa, esposto nel paragrafo precedente per la risoluzione di un sistema lineare di $n$ equazioni in $n$ incognite, può essere facilmente tradotto in una comoda regola. Sempre supponendo $|A| \neq 0$, abbiamo dunque visto che $X = A^{-1}B$, cioè

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$



© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

Incominciamo a ricavare $x_1$:

$$x_1 = \frac{A_{11}}{|A|} b_1 + \frac{A_{21}}{|A|} b_2 + \ldots + \frac{A_{n1}}{|A|} b_n = \frac{b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \ldots + b_n A_{n1}}{|A|} \qquad \boxed{4}$$

Il numeratore dell'ultimo membro della $\boxed{4}$ è, per definizione, lo sviluppo secondo la prima colonna del determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ottenibile dalla matrice $A$ dei coefficienti sostituendo la prima colonna con quella dei termini noti del sistema dato. In modo analogo si ottiene

$$x_2 = \frac{A_{12}}{|A|} b_1 + \frac{A_{22}}{|A|} b_2 + \ldots + \frac{A_{n2}}{|A|} b_n = \frac{b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \ldots + b_n A_{n2}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

e così via per le restanti incognite.
Possiamo quindi enunciare la regola seguente.

**REGOLA DI CRAMER**

Un sistema di $n$ equazioni in $n$ incognite $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$, in cui il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da zero, è possibile e ammette una e una sola soluzione data da

$$x_1 = \frac{D_1}{|A|}; \quad x_2 = \frac{D_2}{|A|}; \quad \ldots; \quad x_i = \frac{D_i}{|A|}; \quad \ldots; \quad x_n = \frac{D_n}{|A|}$$

essendo $D_i$ il determinante della matrice che si ottiene dalla matrice $A$ dei coefficienti sostituendo alla $i$-esima colonna (cioè a quella dei coefficienti dell'incognita che si vuol determinare) la colonna dei termini noti del sistema.

**ATTENZIONE**

La regola di Cramer non va applicata a sistemi lineari con un gran numero di equazioni e incognite, perché i calcoli diventano troppo laboriosi.

**ESEMPIO**

Risolviamo con la regola di Cramer il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Il determinante della matrice dei coefficienti è $\quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$

Calcoliamo:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -24; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -12; \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 24$$

e pertanto si ottiene

$$x_1 = \frac{D_1}{|A|} = \frac{-24}{-12} = 2; \quad x_2 = \frac{D_2}{|A|} = \frac{-12}{-12} = 1; \quad x_3 = \frac{D_3}{|A|} = \frac{24}{-12} = -2$$



© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

# Sistemi di *m* equazioni in *n* incognite

## 9 Teorema di Rouché-Capelli

Approfondiremo ora la trattazione della risolubilità di un generico sistema lineare, in cui *il numero delle equazioni non coincide necessariamente con il numero delle incognite*.

Il teorema di Rouché-Capelli, che enunciamo senza darne la dimostrazione, ci permette di decidere se un dato sistema è possibile o impossibile.

**TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI**

Un sistema lineare è possibile se e soltanto se la matrice dei coefficienti e la matrice completa del sistema hanno lo stesso rango.

Prima di vedere qualche esempio, osserviamo che se $r$ è il rango di $A$, matrice dei coefficienti, e $r'$ è il rango di $A'$, matrice completa del sistema, risulta sempre $r \leq r'$. Infatti, essendo $r$ il rango di $A$, la matrice $A$ contiene un minore non nullo di ordine $r$ e, poiché $A$ è una sottomatrice di $A'$, tale minore risulta contenuto anche in $A'$. Perciò, ricordando la definizione di rango di una matrice, si possono presentare due casi.

- **1° caso.** $A'$ contiene un altro minore non nullo di ordine maggiore di $r$. Si ha allora $\boldsymbol{r < r'}$ e quindi, essendo $r \neq r'$, per il teorema di Rouché-Capelli, il **sistema** è **impossibile** (cioè le sue equazioni sono incompatibili).
- **2° caso.** Tutti i minori di $A'$ di ordine maggiore di $r$ sono nulli. Si ha allora $\boldsymbol{r = r'}$ e il **sistema** è **possibile** (le sue equazioni risultano compatibili).

**IN SINTESI...**

- rango $(A')$ > rango $(A) \iff$ sistema impossibile
- rango $(A')$ = rango $(A) \iff$ sistema possibile

Se il sistema dato è *omogeneo*, ossia se i termini noti sono tutti nulli, esso, come abbiamo già detto nel PARAGRAFO 2, risulta possibile. Tale risultato è coerente con il teorema di Rouché-Capelli: infatti la matrice completa del sistema si ottiene dalla matrice dei coefficienti aggiungendovi una colonna di elementi nulli; pertanto le due matrici hanno certamente lo stesso rango.
Per ricercare eventuali soluzioni diverse dalla soluzione nulla, si procederà come descritto nei paragrafi successivi.

**ESEMPI**

**1** Verificare se è possibile o no il seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 15 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + x_4 = 16 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti e la matrice completa del sistema sono, rispettivamente

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 2 & 15 \\ 2 & 4 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & 1 & 16 \end{bmatrix}$$

Il minore di ordine 2 formato con gli elementi della 1ª e 2ª riga e della 1ª e 3ª colonna di $A$, che è un minore anche di $A'$, risulta non nullo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12$$

Poiché la terza riga di entrambe le matrici è la somma delle prime due, qualunque minore di ordine 3, estratto da una delle due matrici, ha la terza riga uguale alla somma delle prime due e perciò sarà nullo per la proprietà 9 dei determinanti (vedi PARAGRAFO 15, capitolo sulle matrici). Perciò le due matrici $A$ e $A'$ hanno entrambe rango 2 e quindi il sistema risulta possibile.


© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

**2** Verificare se è possibile o no il sistema seguente:

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 8 \\ -2x + y - 3z = -4 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti e la matrice completa del sistema sono rispettivamente

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 8 \\ -2 & 1 & -3 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Com'è facile verificare, si ha che $|A| = 0$ e quindi la matrice $A$ non ha rango 3; si ha invece che il minore

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

è un minore non nullo di ordine 2. La matrice $A$, perciò, ha rango 2. Invece si ha che

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 1 & -3 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -15$$

è un minore non nullo di $A'$ di ordine 3. $A'$ perciò ha rango 3. Il sistema dato è dunque impossibile.

## 10 Risoluzione di un sistema lineare

Vediamo ora come si può risolvere un sistema di $m$ equazioni in $n$ incognite, di cui si sia accertata la possibilità.
Sia $r$ il rango della matrice $A$ dei coefficienti, coincidente dunque con il rango della matrice completa $A'$ del sistema.

1. Si individua una matrice quadrata con determinante diverso da zero di ordine $r$, che chiameremo $H$, sottomatrice di $A$. $H$ deve esistere perché $r$ è il rango di $A$.
2. Se risulta $r < m$, si considerano le $r$ equazioni del sistema corrispondenti alle righe di $H$, trascurando le rimanenti $m - r$ equazioni.
   Nel caso che sia $m = r$ si conservano tutte le equazioni.
3. Si prendono come incognite del sistema le $r$ incognite corrispondenti ai coefficienti che costituiscono le colonne di $H$; se si desidera ottenere una soluzione particolare del sistema, si attribuiscono alle restanti $k = n - r$ incognite valori scelti ad arbitrio. Se invece si vuole ottenere la soluzione generale del sistema, si trattano le restanti $k$ incognite come parametri.
4. Si è così ottenuto un sistema di $r$ equazioni in $r$ incognite, la cui matrice dei coefficienti è $H$. Essendo per ipotesi $|H| \neq 0$, il sistema risulta possibile e determinato; lo si può risolvere con uno dei metodi noti (ad esempio il metodo di Cramer, il metodo di eliminazione, oppure il metodo di sostituzione, ...).

Nell'applicare il procedimento appena visto, occorre tenere presenti le seguenti osservazioni.

- Nel caso in cui il rango $r$ delle due matrici del sistema risulti minore del numero $m$ di equazioni, le $m - r$ equazioni che vengono trascurate risultano certamente soddisfatte dalle soluzioni del sistema formato con le restanti $r$ equazioni. Infatti, come si potrebbe dimostrare, le equazioni trascurate non sono che delle combinazioni lineari di quelle considerate.
- Nel caso in cui il rango $r$ delle due matrici del sistema coincida con il numero $n$ delle incognite, il sistema si riduce a un sistema di $n$ equazioni in $n$ incognite e risulta possibile e determinato. In particolare, se il sistema risulta omogeneo, esso ammette solo la soluzione nulla:
  $$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$
- Se invece risulta $r < n$, posto $k = n - r$, la soluzione del sistema dipende dal valore attribuito a ciascuna delle $k$ incognite "declassate". Come già detto nel **PARAGRAFO 4**, si usa allora dire che il si-


© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

stema ammette $\infty^k$ soluzioni, poiché a ogni $k-$pla ordinata di numeri reali (i valori attribuiti arbitrariamente alle $k$ incognite "declassate") corrisponde una soluzione del sistema.
Evidentemente, in questo caso, poiché le soluzioni del sistema sono infinite, il sistema risulta indeterminato.

- Nel caso in cui il sistema abbia $n$ equazioni e $n$ incognite ($m = n$), se il determinante $|A|$ della matrice dei coefficienti è diverso da zero, il rango di tale matrice risulta $n$, ed è $n$ anche il rango della matrice completa. Pertanto, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è possibile e, per quanto osservato nel **PARAGRAFO 8**, il sistema è anche determinato.
  Se invece il determinante $|A|$ della matrice dei coefficienti fosse nullo, sempre nel caso $m = n$, per decidere se il sistema è possibile, si può applicare il teorema di Rouché-Capelli. Se si verificano le condizioni di possibilità, essendo sicuramente $r < n$, varranno in questo caso le osservazioni fatte al punto precedente.
- Quando si risolve un sistema applicando il metodo di eliminazione, esposto nei **PARAGRAFI 3** e **4**, la possibilità del sistema viene accertata nel corso della risoluzione. Pertanto, applicando il metodo di eliminazione, è superfluo accertare preventivamente la possibilità del sistema mediante il teorema di Rouché-Capelli.

**IN SINTESI**

**Sistemi possibili di *m* equazioni in *n* incognite**

$r = \text{rango } (A) = \text{rango } (A') = \text{rango } (H)$

($A$ matrice dei coefficienti; $A'$ matrice completa; $|H|$ minore non nullo di $A$)

| $m = n$ | $m \neq n$ |
|---|---|
| • Se $|A| \neq 0$ ($r = m = n$) il **sistema** è **determinato**<br>• Se $|A| = 0$ ($r < m = n$) il **sistema** è **indeterminato** | • Se $r = n < m$ si trascurano le $m - r$ equazioni non corrispondenti alle righe di $H$. Il **sistema** è **determinato**.<br>• Se $r = m < n$ il **sistema** è **indeterminato**: le $n - r$ incognite non corrispondenti alle colonne di $H$ diventano parametri da cui dipendono le $\infty^{n-r}$ soluzioni del sistema.<br>• Se $r < m \wedge r < n$ vanno trascurate le $m - r$ equazioni non corrispondenti alle righe di $H$; il **sistema** è **indeterminato**. |

**ESEMPI**

**1** Risolviamo il sistema $\begin{cases} 3x + y - 2z = 7 \\ 5x + 2y - 3z = 10 \\ -x + z = -4 \end{cases}$ $\boxed{1}$

Le matrici incompleta e completa del sistema sono

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 7 \\ 5 & 2 & -3 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Notiamo che, essendo $|A| = 0$, non è possibile applicare direttamente al sistema $\boxed{1}$ il metodo di Cramer. Allo scopo di stabilire se il sistema è possibile o no, determiniamo i ranghi delle due matrici. Osserviamo che sia da $A$ sia da $A'$ si può estrarre un minore non nullo di ordine 2 e precisamente quello formato con gli elementi delle prime due righe e delle prime due colonne:

$$|H| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

L'unico minore di $A$ che si può ottenere orlando $H$ è $|A| = 0$. Perciò $A$ è di rango 2.


© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

I minori di ordine 3 di $A'$ che si possono ottenere orlando $H$ sono due, entrambi nulli:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 10 \\ -1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Perciò anche $A'$ ha rango 2 e quindi, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema $\boxed{1}$ è possibile e ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.
Per risolverlo, consideriamo la prima e la seconda equazione, corrispondenti alle righe di $H$, e trascuriamo la terza; come già detto, essa risulterà certamente soddisfatta da tutte le soluzioni del sistema formato dalle prime due equazioni. Si può osservare che, in questo caso, la terza equazione del sistema si ottiene sommando alla seconda la prima moltiplicata per $-2$. Prendiamo inoltre come incognite $x$ e $y$, corrispondenti alle colonne di $H$, e attribuiamo a $z$ un valore arbitrario, ponendo

$$z = p \qquad \boxed{2}$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 3x + \phantom{2}y - 2p = 7 \\ 5x + 2y - 3p = 10 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3x + \phantom{2}y = 7 + 2p \\ 5x + 2y = 10 + 3p \end{cases}$$

Risolviamolo applicando la regola di Cramer. Il determinante della matrice dei coefficienti è $|H| = 1$; si ha poi

$$D_x = \begin{vmatrix} 7+2p & 1 \\ 10+3p & 2 \end{vmatrix} = 4 + p \qquad D_y = \begin{vmatrix} 3 & 7+2p \\ 5 & 10+3p \end{vmatrix} = -5 - p$$

Perciò è $x = \dfrac{D_x}{|H|} = \dfrac{4+p}{1} = 4 + p$, $y = \dfrac{D_y}{|H|} = \dfrac{-5-p}{1} = -5 - p$; tenendo presente anche la $\boxed{2}$, possiamo affermare che la soluzione generale del sistema è

$$\begin{cases} x = 4 + p \\ y = -5 - p \\ z = p \end{cases}$$

A ogni valore reale di $p$ corrisponde una soluzione particolare del sistema: poiché i valori che si possono attribuire a $p$ sono infiniti, il sistema $\boxed{1}$ ha infinite soluzioni e quindi, come già osservato, è indeterminato.

**NOTA BENE**

**1.** Come già osservato nel **PARAGRAFO 4**, l'introduzione di parametri non è strettamente necessaria. Avremmo potuto trattare direttamente l'incognita $z$ come un parametro, risolvendo il sistema (dopo aver soppresso la terza equazione) rispetto alle incognite $x$ e $y$:

$$\begin{cases} 3x + \phantom{2}y - 2z = 7 \\ 5x + 2y - 3z = 10 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3x + \phantom{2}y = 7 + 2z \\ 5x + 2y = 10 + 3z \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 4 + z \\ y = -5 - z \end{cases} \qquad \boxed{3}$$

**2.** Il minore $H$ prescelto non è l'unico minore di ordine 2 della matrice $A$. Potevamo considerare, ad esempio, il minore $K$ formato dalla prima e terza riga e dalla seconda e terza colonna:

$$|K| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Considerando tale minore avremmo potuto risolvere il sistema $\boxed{1}$ eliminando la seconda equazione e considerando come incognite $y$ e $z$:

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 7 \\ -x + z = -4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y - 2z = 7 - 3x \\ z = -4 + x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = -1 - x \\ z = -4 + x \end{cases} \qquad \boxed{4}$$

È importante rilevare che le $\boxed{4}$ e le $\boxed{3}$ differiscono solo formalmente: in realtà esse esprimono lo stesso insieme di soluzioni: ciò significa che, se dalle $\boxed{3}$, per un particolare valore di $z$, otteniamo una soluzione $(x_0;\ y_0;\ z§$, si può ottenere la stessa soluzione dalle $\boxed{4}$ per un opportuno valore di $x$. Ad esempio, dalle $\boxed{3}$ per $z = -2$ otteniamo $x = 2$, $y = -3$; la stessa terna $(2;\ -3;\ -2)$ si ricava dalle $\boxed{4}$ per $x = 2$.



© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

**2** Determiniamo la soluzione generale del sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 15 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + x_4 = 16 \end{cases} \qquad \boxed{5}$$

già considerato all'**ESEMPIO 1** del **PARAGRAFO 9**.
Come abbiamo già detto, tale sistema risulta possibile e ammette $\infty^2$ soluzioni; lo possiamo risolvere considerando solo le prime due equazioni e prendendo come incognite $x_1$ e $x_3$. Tratteremo perciò $x_2$ e $x_4$ come dei parametri e risolveremo il sistema $\boxed{5}$ con uno dei metodi noti:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_3 = 15 - 2x_2 - 2x_4 \\ 2x_1 + 2x_3 = 1 - 4x_2 + x_4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{35}{12} - 2x_2 + \dfrac{1}{12}x_4 \\ x_3 = -\dfrac{29}{12} + \dfrac{5}{12}x_4 \end{cases}$$

# Sistemi lineari parametrici

## 11 Risoluzione di sistemi con discussione

Nel caso in cui in un sistema, oltre alle incognite, figurino uno o più parametri, la risoluzione dovrà essere preceduta da un'opportuna discussione, il cui scopo sarà quello di stabilire per quali valori dei parametri il sistema risulti determinato, indeterminato o impossibile.

**ESEMPI**

**1** Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} (a-1)x + 2ay = -2 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R} \qquad \boxed{1}$$

Consideriamo la matrice dei coefficienti e la matrice completa del sistema dato, che sono rispettivamente

$$A = \begin{bmatrix} a-1 & 2a \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A' = \begin{bmatrix} a-1 & 2a & -2 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$A$ è una matrice quadrata di ordine 2, che possiede elementi non nulli; il suo rango è perciò maggiore o uguale a 1, ed è 2 se e solo se il suo determinante $|A| = 2 - 8a$ è diverso da zero; ciò accade se e solo se si ha

$$2 - 8a \neq 0 \iff a \neq \frac{1}{4}$$

Dunque per $a \neq 1/4$ il rango di $A$ è 2 e in tal caso $A'$, avendo un minore non nullo di ordine 2 ($|A|$ stesso) ha anch'essa rango 2 e, per quanto detto nel **PARAGRAFO 9**, il sistema $\boxed{1}$ è determinato. Risolvendolo si trova $x = 2 \wedge y = -1$.

Per $a = 1/4$ il sistema $\boxed{1}$ si riduce a

$$\begin{cases} -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}y = -2 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases} \quad \text{e si ha} \quad A = \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{4} & \dfrac{1}{2} \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{4} & \dfrac{1}{2} & -2 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Il rango di $A$, come già detto, è in questo caso 1. Per determinare il rango di $B$, anziché applicare il teorema di Kronecker, si può osservare che la seconda riga di $B$ si ottiene moltiplicando per $-4$ la prima. Perciò, qualunque minore di ordine 2 estratto da $B$, avendo due righe proporzionali, è nullo; dunque anche il rango di $B$ è 1 e quindi il sistema $\boxed{1}$ è possibile. La soluzione generale si può trovare considerando una qualsiasi delle due equazioni e trattando ad esempio $x$ come incognita.
Si ottiene

$$x = \frac{2y+8}{3}$$

Riassumendo:

- $a \neq 1/4 \longrightarrow$ sistema determinato: $x = 2 \wedge y = -1$.
- $a = 1/4 \longrightarrow$ sistema indeterminato con $\infty^1$ soluzioni: $x = \dfrac{2y+8}{3} \wedge y \in \mathbb{R}$


© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

**2** Risolvere il sistema

$$\begin{cases} ax + 2y + 3z = a - 3 \\ by - 5z = 5 \\ ax + (b+2)y + (a-2)z = 2 \end{cases}$$

2

Cominciamo con il determinare il rango della matrice dei coefficienti, che è

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ 0 & b & -5 \\ a & b+2 & a-2 \end{bmatrix}$$

In questo caso, essendo $A$ una matrice quadrata, conviene ragionare nel modo seguente.
Il rango di $A$ è 3 se e solo se il suo determinante, che è $a^2 b$, è diverso da 0. Ciò accade se e solo se si ha $a \neq 0 \wedge b \neq 0$.
Analizziamo ora che cosa accade rispettivamente nel caso in cui sia $a = 0$ e nel caso $b = 0$.
Se è $a = 0$ si ha

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & b & -5 \\ 0 & b+2 & -2 \end{bmatrix}$$

Tale matrice ha rango almeno 1, essendo non nullo, ad esempio, il minore costituito dal secondo elemento della prima riga. Orlando tale minore (possiamo trascurare i minori di ordine 2 formati con elementi della prima colonna, che sono certamente nulli), si ottengono i seguenti minori di ordine 2:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ b & -5 \end{vmatrix} = -10 - 3b; \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ b+2 & -2 \end{vmatrix} = -10 - 3b$$

entrambi si annullano se e solo se è $b = -10/3$.
Dunque, nel caso sia $a = 0$, il rango di $A$ è 2 se è anche $b \neq -10/3$, mentre $A$ ha rango 1 se è $b = -10/3$.
Analizziamo ora che cosa accade se è $b = 0$. In tal caso è

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ a & 2 & a-2 \end{bmatrix}$$

e il minore formato dalle prime due righe e dalla seconda e terza colonna è non nullo, essendo

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

Dunque se è $b = 0$, indipendentemente dal valore di $a$, il rango di $A$ è 2.

Riassumiamo i risultati fin qui ottenuti

**A** $a \neq 0 \wedge b \neq 0$ $\longrightarrow$ il rango di $A$ è 3;
**B** $a = 0 \wedge b \neq -10/3$ $\longrightarrow$ il rango di $A$ è 2;
**C** $a = 0 \wedge b = -10/3$ $\longrightarrow$ il rango di $A$ è 1;
**D** $b = 0$ $\longrightarrow$ il rango di $A$ è 2.

Consideriamo ora, in corrispondenza di ciascuno di tali casi, la matrice completa del sistema

$$A' = \begin{bmatrix} a & 2 & 3 & a-3 \\ 0 & b & -5 & 5 \\ a & b+2 & a-2 & 2 \end{bmatrix}$$

**A** $a \neq 0 \wedge b \neq 0$. Essendo 3 il rango di $A$, la matrice $A'$, che contiene $A$ come sottomatrice, ha anch'essa rango 3. Il sistema è quindi determinato. Risolvendolo con uno dei metodi noti si trova $x = 1$, $y = 0$, $z = -1$.



© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

**B** $a = 0 \wedge b \neq -10/3$. Si ha

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & b & -5 & 5 \\ 0 & b+2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Il rango di $A'$, che non può essere minore di quello di $A$ (**PARAGRAFO 9**) è almeno 2. Del resto i minori di ordine 3 estratti da $A'$ prendendo la prima colonna sono certamente nulli essendo nulli tutti gli elementi di tale colonna; l'unico minore che non contiene tale colonna è quello formato dalla seconda, terza e quarta colonna di $A$, ma poiché le ultime due di queste colonne sono opposte, anche tale minore è nullo. Quindi in questo caso anche il rango di $A'$ è 2 e il sistema $\boxed{2}$ risulta possibile. Per risolverlo possiamo considerare $x$ come un parametro, ponendo $x = p$, e risolvere rispetto a $y$ e a $z$ il sistema formato dalla prima e dalla seconda equazione, che per $a = 0$ si riduce a

$$\begin{cases} 2y + 3z = -3 \\ by - 5z = 5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

Si osservi che nel sistema ottenuto per $a = 0$ non compare l'incognita $x$. Ciò significa che il sistema $\boxed{2}$ per $y = 0 \wedge z = -1$ è soddisfatto da qualunque valore di $x$ ed è quindi indeterminato, ammettendo $\infty^1$ soluzioni. L'insieme delle soluzioni è quindi formato dalle terne di numeri reali $(p\,;0\,;-1)$ con $p \in \mathbb{R}$.

**C** $a = 0 \wedge b = -10/3$. Si ha

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -\dfrac{10}{3} & -5 & 5 \\ 0 & -\dfrac{4}{3} & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Si può osservare che in tale matrice la seconda e la terza riga sono proporzionali alla prima. Pertanto, qualunque minore di ordine 2 estratto da $A'$, avendo due righe proporzionali, è nullo e il rango di $A'$ è 1 come quello di $A$. Il sistema $\boxed{2}$ è quindi possibile; lo si può risolvere ponendo $x = p_1$ e $y = p_2$ e considerando solo la prima equazione che, in questo caso diviene

$$2p_2 + 3z = -3 \longrightarrow z = -\frac{2p_2 + 3}{3}$$

Il sistema $\boxed{2}$ ammette quindi $\infty^2$ soluzioni, costituite dalle terne di numeri reali del tipo $\left(p_1\,;p_2\,;-\dfrac{2p_2+3}{3}\right)$, con $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$.

**D** $b = 0$. Si ha

$$A' = \begin{bmatrix} a & 2 & 3 & a-3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ a & 2 & a-2 & 2 \end{bmatrix}$$

Orliamo il minore costituito dagli elementi della prima e seconda riga e della seconda e terza colonna con gli elementi della quarta colonna e terza riga (è inutile considerare la prima colonna perché in tal caso si otterrebbe di nuovo $|A|$ che sappiamo già essere nullo). Si ottiene

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & a-3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 2 & a-2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Dunque il rango di $A'$ è 2 e coincide con quello di $A$: il sistema è possibile; risolviamolo ponendo $x = p$ e considerando la prima e la seconda equazione nelle incognite $y$ e $z$:

$$\begin{cases} ap + 2y + 3z = a - 3 \\ -5z = 5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{a(1-p)}{2} \\ z = -1 \end{cases}$$

Il sistema $\boxed{2}$ è perciò indeterminato, ammettendo come soluzioni le $\infty^1$ terne di numeri reali nella forma $\left(p\,;\dfrac{a(1-p)}{2}\,;-1\right)$, con $p \in \mathbb{R}$.



© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

Riassumendo:

**A** $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \quad \longrightarrow \quad$ sistema determinato: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$

**B** $a = 0 \wedge b \neq -\dfrac{10}{3} \quad \longrightarrow \quad$ sistema indeterminato con $\infty^1$ soluzioni: $\begin{cases} x = p \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$

**C** $a = 0 \wedge b = -\dfrac{10}{3} \quad \longrightarrow \quad$ sistema indeterminato con $\infty^2$ soluzioni: $\begin{cases} x = p_1 \\ y = p_2 \\ z = -\dfrac{2p_2 + 3}{3} \end{cases}$

**D** $b = 0 \quad \longrightarrow \quad$ sistema indeterminato con $\infty^1$ soluzioni: $\begin{cases} x = p \\ y = \dfrac{a(1-p)}{2} \\ z = -1 \end{cases}$



© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

# Esercizi

- **Nozioni fondamentali**
- **Il metodo di eliminazione. Matrici e sistemi lineari**
- **Metodo della matrice inversa. Regola di Cramer. Teorema di Rouché-Capelli**
- **Sistemi parametrici**

## Nozioni fondamentali

**RICORDIAMO LA TEORIA**

- **Sistema lineare**: sistema di equazioni di primo grado.
- **Sistema omogeneo**: i termini noti di tutte le sue equazioni sono nulli.
- **Soluzione di un sistema di *m* equazioni in *n* incognite**: $n$-upla ordinata che verifica contemporaneamente tutte le equazioni del sistema.
- **Sistema lineare determinato**: ha un'unica soluzione.
- **Sistema indeterminato**: ha infinite soluzioni.
- **Sistema impossibile**: non ammette soluzione.

**QUESITI**

**1** Che cos'è un'equazione lineare?

**2** In quale caso le equazioni di un sistema si dicono incompatibili?

**3** Da che cosa dipendono le $\infty^{n-r}$ soluzioni di un sistema indeterminato?

**VERO O FALSO?**

**4** Un sistema omogeneo può essere impossibile. V F

**5** Un sistema omogeneo può essere indeterminato. V F

**6** Un sistema lineare determinato, di due equazioni in due incognite, ha due soluzioni. V F

**7** In un sistema lineare il numero delle equazioni può essere diverso dal numero delle incognite. V F

**8** In un sistema lineare il numero delle soluzioni è uguale al numero delle incognite. V F

**9** Se un sistema lineare ha più di una soluzione, allora è indeterminato. V F

**10** Se un sistema lineare ha due equazioni incompatibili, allora è impossibile. V F

**11** In un sistema lineare indeterminato il numero delle equazioni non equivalenti è minore del numero delle incognite. V F

**QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA**

**12** Il sistema $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \end{cases}$ è

**a** indeterminato, perché il numero delle incognite supera il numero delle equazioni

**b** impossibile, perché le equazioni sono incompatibili

**c** determinato, perché ammette solo la soluzione $(1\,;2)$



© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

**13** Un sistema omogeneo può essere (si può dare più di una risposta)

**a** impossibile e indeterminato **b** possibile e indeterminato

**c** impossibile e determinato **d** possibile e determinato

## Il metodo di eliminazione. Matrici e sistemi lineari

### RICORDIAMO LA TEORIA

- **Principio di riduzione**: sostituendo una combinazione lineare di due equazioni di un sistema al posto di una di esse, si ottiene un sistema equivalente al sistema dato.
- **Metodo di eliminazione**: applicando ripetutamente il principio di riduzione, si cerca di eliminare la prima incognita da tutte le equazioni, eccetto che dalla prima; si cerca poi di eliminare la seconda incognita da tutte le equazioni eccetto che dalla seconda;...
  Alla fine, se il sistema non è impossibile, può accadere che il sistema sia
  - determinato, se in ogni equazione compare una sola incognita;
  - indeterminato, se in almeno un'equazione figurano due o più incognite.
- Dato il **sistema lineare**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

la **matrice dei coefficienti** del sistema è

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Aggiungendo ad $A$, come colonna $(n+1)$-esima, la matrice colonna dei termini noti

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

si ottiene la **matrice completa** $A'$ del sistema.

### QUESITI

**14** Che cos'è una combinazione lineare di due equazioni?

**15** Quando la matrice dei coefficienti e la matrice completa di un sistema lineare coincidono?

### VERO O FALSO?

**16** Il metodo di eliminazione si può applicare alla risoluzione di qualsiasi sistema lineare. **V** **F**

**17** Se al termine dell'applicazione del metodo di eliminazione in qualche equazione compare più di un'incognita, il sistema è impossibile. **V** **F**

**18** Il metodo di eliminazione si può applicare solo se in ogni equazione compaiono tutte le incognite. **V** **F**

**19** Applicando il metodo di eliminazione non è necessario assicurarsi che il sistema sia possibile **V** **F**

**20** Un sistema in cui il numero delle equazioni supera il numero delle incognite può essere determinato. **V** **F**

**21** Un sistema in cui il numero delle equazioni supera il numero delle incognite può essere impossibile. **V** **F**

### COMPLETARE...

**22** Se, applicando il metodo di eliminazione, due delle equazioni del sistema divengono identiche o equivalenti, allora una delle equazioni ............................................................................ .

**23** Se, applicando il metodo di eliminazione, un'equazione assume la forma $0 = 1$, allora il sistema è .................................................................... .


© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

**24** Se, al termine dell'applicazione del metodo di eliminazione, in ogni equazione compare una sola incognita, il sistema è ........................................................... .

**25** Forma la combinazione lineare delle equazioni $6x - 8y + z = 5$ e $9x - 12y + z = 2$ secondo i coefficienti 3 e $-2$. $[z = 11]$

**26** Forma la combinazione lineare delle equazioni $12x - 2y + 8z = 7$ e $5x + 6y + 7z = 3$ secondo i coefficienti $-2$ e 5. $[x + 34y + 19z = 1]$

**27** Forma la combinazione lineare delle equazioni $x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$ e $2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 1$ secondo i coefficienti 2 e $-1$. $[x_2 + 7x_4 = -1]$

**28** Forma una combinazione lineare delle equazioni $12x - 3y + 4z = 1$ e $15x + 4y + 3z = 5$ in modo che in essa non compaia l'incognita $x$.

**29** Forma una combinazione lineare delle equazioni $6x - 14y - 5z = 8$ e $4x + 8y - 3z = 1$ in modo che in essa non compaia l'incognita $y$.

### Scrivi i seguenti sistemi in forma matriciale.

**30** $\begin{cases} x - y + z + w = 3 \\ x + y - z - w = -3 \end{cases}$ ; $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$

**31** $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 5 \\ z + w = 4 \\ z - w = -2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 4 \\ x_2 - 2x_1 = -1 \\ 5x_3 - 2x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases}$

**32** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_5 = x_4 + 2x_1 - 5x_3 + 7 \\ 5 - 6x_2 + 8(x_3 - x_1) = 2(x_1 - x_4 + 3) + 5x_5 \end{cases}$

### Risolvi i seguenti sistemi con il metodo di eliminazione.

**ESERCIZIO SVOLTO**

**33** $\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 - 2 \\ x_1 + x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$

La matrice completa del sistema è $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Eliminiamo l'incognita $x_1$ dalla seconda e dalla terza equazione, cioè rendiamo nulli gli elementi della prima colonna tranne quello della prima riga.
Sostituendo alla seconda riga la differenza tra la prima e la seconda, otteniamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

e, sostituendo ora alla terza riga la differenza tra la prima e la terza, si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Rendiamo ora nulli gli elementi della seconda colonna tranne quello della seconda riga: sostituendo alla prima riga la differenza tra la prima e la seconda riga e poi alla terza riga la somma tra la seconda e la terza, otteniamo

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{vmatrix}$ che, dividendo per $-3$ la terza riga, equivale a $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$



© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

Infine, rendiamo nulli tutti gli elementi della terza colonna tranne quello della terza riga: sostituiamo alla prima riga la differenza della prima con la terza e alla seconda riga la somma della seconda con la terza, preventivamente moltiplicata per 2.

Otteniamo, dapprima $\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right|$ e, poi, $\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right|$.

Abbiamo quindi ottenuto per soluzione la terna

$$x_1 = -2; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 1$$

**34** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$ $[x_1 = x_3 = -1; \; x_2 = 1]$

**35** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -6 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 7 \end{cases}$ $[x_1 = 3; \; x_2 = -3; \; x_3 = 1]$

**36** $\begin{cases} 5x + 3y - 3z = 15 \\ 6x + 2y + 2z = 22 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$ $[x = 3; \; y = 1; \; z = 1]$

**37** $\begin{cases} 5x + 3y + 4z = -1 \\ 2x + 3y + z = -1 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$ $[x = 2; \; y = -1; \; z = -2]$

**38** $\begin{cases} -x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 3 \\ -4x_1 + 7x_2 + 7x_3 = \dfrac{3}{2} \\ -4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$ $\left[x_1 = \dfrac{1}{2}; \; x_2 = \dfrac{3}{4}; \; x_3 = -\dfrac{1}{4}\right]$

**39** $\begin{cases} 6y + 5z = 3x - 2 \\ -2 + 2x = 5y + 3z \\ 6z - 8 = -2x - 4y \end{cases}$ $\left[x = \dfrac{5}{3}; \; y = -\dfrac{1}{3}; \; z = 1\right]$

**40** $\begin{cases} x_1 + x_2 = 9 \\ x_1 + x_3 = 12 \\ x_2 + x_3 = 15 \end{cases}$ $[x_1 = 3; \; x_2 = 6; \; x_3 = 9]$

**41** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$ $[x_1 = 2; \; x_2 = 0; \; x_3 = 1]$

**42** $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 2 \\ -x + y - z = 1 \end{cases}$ [impossibile]

**43** $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ y - z = -1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ $[x = 5; \; y = -7; \; z = -6]$

**44** $\begin{cases} 6x + 5y + 3z = -3 \\ 2x + 3y - z = -3 \\ x + 2z = 1 \\ 3x + 3y + z = -2 \end{cases}$ $[x = -1; \; y = 0; \; z = 1]$

**45** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 8 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ $\left[x_1 = \dfrac{5}{2}; \; x_2 = -\dfrac{9}{2}; \; x_3 = \dfrac{3}{2}\right]$

**46** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$ [impossibile]

**47** $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - 5z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$ $[x = 0; \; y = 0; \; z = 0]$



© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

**48** $\begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - 5z = -2 \\ \frac{5}{2}x - 3y + \frac{1}{2}z = 3 \\ 5x + 5y - \frac{51}{2}z = -\frac{51}{4} \end{cases}$ $\left[x = \frac{1}{2};\ y = -\frac{1}{2};\ z = \frac{1}{2}\right]$

**49** $\begin{cases} x + 5y + 6z = -3 \\ 7x + y + 2z = 19 \\ 9x + 11y - 10z = 37 \\ 13x - 3y - 2z = 41 \end{cases}$ $[x = 3;\ y = 0;\ z = -1]$

**50** $\begin{cases} x_1 + 5x_3 + 2x_4 = 6 \\ 4x_1 + x_2 + 8x_3 = 20 \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 11 \\ 8x_1 + 2x_2 + x_3 + 17x_4 = 8 \end{cases}$ $[x_1 = 3;\ x_2 = 0;\ x_3 = 1;\ x_4 = -1]$

**51** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 24 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 21 \\ -4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -12 \end{cases}$ $[x_1 = -2;\ x_2 = 5;\ x_3 = -3;\ x_4 = 1]$

**52** $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 13 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$ $[x_1 = x_2 = x_4 = 1;\ x_3 = 2]$

**53** $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 14 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 22 \\ 2x_1 + 6x_2 - 10x_3 + 6x_4 = 72 \\ x_1 - 9x_2 + 16x_3 - 9x_4 = -60 \end{cases}$ $[x_1 = 12;\ x_2 = -13;\ x_3 = 0;\ x_4 = 21]$

**54** $\begin{cases} x + y + z + w = 5 \\ 2x + 2y + 2z + 2w = 9 \\ 3x + 3y + 3z + 3w = 14 \end{cases}$ [impossibile]

**55** $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 3 \end{cases}$ [impossibile]

**56** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_5 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_4 + 2x_5 = 5 \end{cases}$ $\left[x_1 = 2;\ x_2 = -1;\ x_3 = \frac{1}{3};\ x_4 = \frac{1}{2};\ x_5 = 1\right]$

**57** $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -1 \\ 10x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 2x_5 = -6 \\ 8x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_4 + 4x_5 = 1 \\ 4x_1 - 2x_3 - 6x_4 - 2x_5 = -5 \end{cases}$ $\left[x_1 = x_3 = 0;\ x_2 = x_4 = 1;\ x_5 = -\frac{1}{2}\right]$

**58** $\begin{cases} x_1 + 5x_3 - 3x_5 = 1 \\ -x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 9x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 - 9x_5 = 0 \end{cases}$ [impossibile]

**ESERCIZIO SVOLTO**

**59** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$

La matrice completa del sistema è $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \end{bmatrix}$



© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

Sostituendo alla prima riga la somma di questa e della seconda moltiplicata per 2 abbiamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

Sostituendo alla terza riga la somma tra essa e la prima moltiplicata per $-2$ otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Osserviamo che la seconda e la terza riga sono identiche; il sistema dato è quindi indeterminato con $\infty^1$ soluzioni ed è equivalente al sistema $\begin{cases} x_1 + x_3 = 5 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

Scegliendo come parametro $x_3 = p$ l'insieme delle soluzioni sarà espresso da

$$x_1 = 5 - p \wedge x_2 = 1 + p \wedge x_3 = p$$

**60** $\begin{cases} x + 3y - 2z = 6 \\ 2x + 7y + 5z = 4 \end{cases}$ [indeterminato con $\infty^1$ soluzioni: $x = 30 + 29p;\ y = -8 - 9p;\ z = p$]

**61** $\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ x - y + 4z = -1 \end{cases}$ [indeterminato con $\infty^1$ soluzioni: $x = 1 - p;\ y = 2 + 3p;\ z = p$]

**62** $\begin{cases} 2x + y + z = -4 \\ x + 2y + 8z = 1 \end{cases}$ [indeterminato con $\infty^1$ soluzioni: $x = 2p - 3;\ y = 2 - 5p;\ z = p$]

**63** $\begin{cases} 3x + 2y - z = 5 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ 3x + 7y + 4z = 10 \end{cases}$ [indeterminato con $\infty^1$ soluzioni: $x = 1 + p;\ y = 1 - p;\ z = p$]

**64** $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 5y + 7z = 0 \end{cases}$ [indeterminato con $\infty^1$ soluzioni: $x = p;\ y = -2p;\ z = p$]

**65** $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$ [indeterminato con $\infty^2$ soluzioni: $x_1 = 1 + p - q;\ x_2 = p;\ x_3 = q$]

**66** $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 4 \\ 3x + 5y + 7z = 6 \\ 4x + 7y + 10z = 8 \\ 5x + 9y + 13z = 10 \end{cases}$ [indeterminato con $\infty^1$ soluzioni: $x = 2 + p;\ y = -2p;\ z = p$]

**67** $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 3 \\ 3x + 5y + 7z = 5 \\ 4x + 7y + 10z = 7 \\ 5x + 9y + 13z = 9 \end{cases}$ [indeterminato con $\infty^1$ soluzioni: $x = p;\ y = 1 - 2p;\ z = p$]

**68** $\begin{cases} -2x + 3z = 7 \\ -4x - 2y + z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \\ -10x - 6y = 2 \end{cases}$ [indeterminato con $\infty^1$ soluzioni: $x = \dfrac{3p - 7}{2};\ y = \dfrac{11 - 5p}{2};\ z = p$]

**69** $\begin{cases} 2x + 3y - z - 2v = 0 \\ 4x - 3y - 5z + 5v = 0 \\ 8x + 3y - 7z + v = 0 \end{cases}$ [indeterminato con $\infty^2$ soluzioni: $x = \dfrac{2p - q}{2};\ y = \dfrac{-p + 3q}{3};\ z = p;\ v = q$]

**70** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0 \\ 9x_1 + 10x_2 + 11x_3 + 12x_4 = 0 \\ 13x_1 + 14x_2 + 15x_3 + 16x_4 = 0 \\ 17x_1 + 18x_2 + 19x_3 + 20x_4 = 0 \end{cases}$ [indeterminato con $\infty^2$ soluzioni: $x_1 = p + 2q;\ x_2 = -2p - 3q;\ x_3 = p;\ x_4 = q$]



© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

**71** $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3-2x_4-5x_5=0 \\ -x_1-3x_2+4x_3-2x_4-5x_5=0 \\ 2x_1+6x_2+x_3-2x_4-5x_5=0 \\ x_1+3x_2+5x_3-4x_4-10x_5=0 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}\text{indeterminato con } \infty^3 \text{ soluzioni:} \\ x_1=p_2-3p_1;\ x_2=p_1;\ x_3=p_2; \\ x_4=\dfrac{3p_2-5p_3}{2};\ x_5=p_3\end{array}\right]$

**72** $\begin{cases} 4x_1-4x_3+3x_4=5 \\ 4x_1+4x_2-2x_3-3x_4-2x_5=-1 \\ 8x_1+2x_2-7x_3+3x_4-x_5=7 \\ 12x_1+6x_2-9x_3-3x_5=6 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}\text{indeterminato con } \infty^3 \text{ soluzioni:} \\ x_1=\dfrac{3p_2-2p_1+p_3+2}{4};\ x_2=p_1;\ x_3=p_2; \\ x_4=\dfrac{p_2+2p_1-p_3+3}{3};\ x_5=p_3\end{array}\right]$

**73** $\begin{cases} x\ sen\ \alpha+y\ cos\ \alpha+z\ cos\ \alpha=1 \\ -x\ cos\ \alpha+y\ sen\ \alpha+z\ sen\ \alpha=0 \\ x\ sen\ \alpha-y\ cos\ \alpha+z\ sen\ \alpha=-cos\ 2\alpha \end{cases}$ $\left(\alpha\neq\dfrac{3}{4}\pi+k\pi\right)$ $[x=sen\ \alpha;\ y=cos\ \alpha;\ z=0]$

**74** $\begin{cases} x+y\ tan\ \alpha+z\ cot\ \alpha=3 \\ x-y\ tan\ \alpha+z\ cot\ \alpha=1 \\ x+y\ tan\ \alpha-z\ cot\ \alpha=1 \end{cases}$ $\left(\alpha\neq k\dfrac{\pi}{2}\right)$ $[x=1;\ y=cot\ \alpha;\ z=tan\ \alpha]$

**75** $\begin{cases} x_1+x_2\ tan\ \alpha+x_3\ cot\ \alpha-x_4\ sen\ \alpha=4 \\ x_1-x_2\ tan\ \alpha+x_3\ cot\ \alpha+x_4\ sen\ \alpha=2 \\ x_1+x_2\ tan\ \alpha-x_3\ cot\ \alpha+x_4\ sen\ \alpha=2 \\ x_1-x_2\ tan\ \alpha-x_3\ cot\ \alpha-x_4\ sen\ \alpha=0 \end{cases}$ $\left(\alpha\neq k\dfrac{\pi}{2}\right)$

$[x_1=2;\ x_2=cot\ \alpha;\ x_3=tan\ \alpha;\ x_4=0]$

## Metodo della matrice inversa. Regola di Cramer. Teorema di Rouché-Capelli

**RICORDIAMO LA TEORIA**

- **Metodo della matrice inversa**: detta $A$ la matrice dei coefficienti di un sistema di $n$ equazioni in $n$ incognite, se $|A|\neq 0$ allora l'unica soluzione del sistema dato, scritta in forma matriciale, è $X=A^{-1}\cdot B$, essendo $B$ la matrice colonna dei termini noti del sistema.
- **Regola di Cramer**: detta $A$ la matrice dei coefficienti di un sistema di $n$ equazioni in $n$ incognite, se $|A|\neq 0$, allora l'unica soluzione del sistema è data da $x_i=\dfrac{D_i}{|A|}$, $i=1, \ldots, n$, essendo $D_i$ il determinante che si ottiene da $A$ sostituendo alla $i$-esima colonna la colonna dei termini noti del sistema.
- **Teorema di Rouché-Capelli**: un sistema lineare è possibile se e solo se la matrice dei coefficienti e la matrice completa del sistema hanno lo stesso rango.

**QUESITI**

**76** Quando si può applicare la regola di Cramer?

**77** In un sistema di cinque equazioni in sei incognite, il rango della matrice dei coefficienti e il rango della matrice completa sono uguali a 4. Che cosa si può dire di quel sistema?

**VERO O FALSO?**

**78** Il metodo della matrice inversa si può applicare ai sistemi il cui numero di equazioni è uguale al numero delle incognite, purché il determinante della matrice dei coefficienti sia diverso da zero. V F

**79** La regola di Cramer permette di risolvere qualunque sistema in cui il numero delle equazioni è uguale al numero delle incognite. V F

**80** Se il rango della matrice dei coefficienti e quello della matrice completa di un sistema lineare sono diversi, il sistema è impossibile. V F

**81** Per stabilire se un sistema omogeneo è possibile, è necessario applicare il teorema di Rouché-Capelli. V F

**82** Se il rango della matrice dei coefficienti e quello della matrice completa di un sistema lineare sono uguali al numero delle incognite del sistema, esso è determinato. V F

**83** Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di $n$ equazioni in $n$ incognite sia determinato è che il determinante della matrice dei coefficienti del sistema sia diverso da zero. V F


© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

**84** Se il determinante della matrice dei coefficienti associata a un sistema di $n$ equazioni in $n$ incognite è nullo, il sistema è impossibile. **V** **F**

**QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA**

**85** Se in un sistema di 6 equazioni in 9 incognite la matrice dei coefficienti e la matrice completa hanno rango 5, si può dire che

- **a** il sistema è impossibile
- **b** il sistema è determinato
- **c** il sistema è indeterminato e la sua soluzione generale si può esprimere mediante un parametro $(1 = 6 - 5)$
- **d** il sistema è indeterminato e la sua soluzione generale si può esprimere mediante quattro parametri $(4 = 9 - 5)$
- **e** il sistema è indeterminato e la sua soluzione generale si può esprimere mediante tre parametri $(3 = 9 - 6)$.

**86** Il metodo di Cramer si può applicare se

- **a** il numero delle equazioni è uguale al numero delle incognite
- **b** il numero delle equazioni è uguale al numero delle incognite e la matrice dei coefficienti del sistema ha determinante diverso da zero
- **c** il numero delle equazioni è uguale al numero delle incognite e la matrice dei coefficienti del sistema ha determinante uguale a zero

**87** Riguardo al metodo della matrice inversa e al metodo di Cramer si può affermare che

- **a** i due metodi si possono applicare negli stessi casi;
- **b** in alcuni casi si può applicare il metodo della matrice inversa, ma non il metodo di Cramer
- **c** in alcuni casi si può applicare il metodo di Cramer, ma non il metodo della matrice inversa

## Metodo della matrice inversa

**Risolvi i seguenti sistemi con il metodo della matrice inversa.**

**ESERCIZIO SVOLTO**

**88** $\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 4x + 4y + z = -3 \\ -x - y = 1 \end{cases}$

La matrice dei coefficienti è $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$,

mentre il vettore colonna dei termini noti è $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Calcoliamo l'inversa della matrice dei coefficienti con il metodo imparato nel capitolo sulle matrici, ottenendo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Quindi, ricordando che, in forma matriciale, la soluzione $X$ del sistema è data da $X = A^{-1} \cdot B$, determiniamo la terna soluzione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$



© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

**89** $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$ $[x = 3;\ y = -1]$

**90** $\begin{cases} 6x_1 - 17x_2 = -22 \\ -x_1 + 3x_2 = 4 \end{cases}$ $[x_1 = 2;\ x_2 = 2]$

**91** $\begin{cases} 13x - 21y = -86 \\ -34x + 55y = 225 \end{cases}$ $[x = -5;\ y = 1]$

**92** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$ $\left[x_1 = \frac{1}{3};\ x_2 = \frac{2}{9};\ x_3 = \frac{2}{9}\right]$

**93** $\begin{cases} x_1 + 5x_3 + 2x_4 = 6 \\ 4x_1 + x_2 + 8x_3 = 20 \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 11 \\ 8x_1 + 2x_2 + x_3 + 17x_4 = 8 \end{cases}$ $[x_1 = 3;\ x_2 = 0;\ x_3 = 1;\ x_4 = -1]$

**94** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 24 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 21 \\ -4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -12 \end{cases}$ $[x_1 = -2;\ x_2 = 5;\ x_3 = -3;\ x_4 = 1]$

**95** $\begin{cases} x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha = \tan \alpha \\ -x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha = 1 \end{cases}$ $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ $\left[x = 0;\ y = \frac{1}{\cos \alpha}\right]$

**96** $\begin{cases} ay + bz = ab + bc \\ ax + cz = a^2 + c^2 \\ bx + cy = ab + bc \end{cases}$ con $a \cdot b \cdot c \neq 0$ $[x = a;\ y = b;\ z = c]$

## Regola di Cramer

**Risolvi con la regola di Cramer i seguenti sistemi.**

**ESERCIZIO SVOLTO**

**97** $\begin{cases} -x + 4y + 6z = 4 \\ x - y - 2z = -2 \\ -x + 2y + 3z = 3 \end{cases}$

Il determinante della matrice dei coefficienti è $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$

Calcoliamo, quindi, i determinanti $D_i$ delle matrici che si ottengono dalla matrice $A$ sostituendo alla $i$-esima colonna la colonna dei termini noti, ricordando che sarà $x_i = \frac{D_i}{|A|}$. Abbiamo

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 6 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \qquad D_3 = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

Quindi otteniamo

$$x_1 = \frac{D_1}{|A|} = -2,\ x_2 = \frac{D_2}{|A|} = 2,\ x_3 = \frac{D_3}{|A|} = -1$$

**98** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 - x_2 = -2 \end{cases}$ $[x_1 = -1;\ x_2 = 1]$

**99** $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_1 + 4x_2 = 7 \end{cases}$ $[x_1 = -1;\ x_2 = 2]$



© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

**100** $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -5 \\ x_1 + 4x_2 = 14 \end{cases}$ $[x_1 = 2;\ x_2 = 3]$

**101** $\begin{cases} 3x + 2y + z = -5 \\ 3x + 3y + z = 2 \\ -2x - 3y + z = -5 \end{cases}$ $[x = -7;\ y = 7;\ z = 2]$

**102** $\begin{cases} 5x + y + 2z = 5 \\ x - 5y + z = 15 \\ -2x + 4y + z = -15 \end{cases}$ $\left[x = \frac{7}{4};\ y = -\frac{11}{4};\ z = -\frac{1}{2}\right]$

**103** $\begin{cases} -5x + 2y + 4z = 15 \\ 10x - y + 6z = 18 \\ -10x + y + 6z = 16 \end{cases}$ $\left[x = \frac{17}{45};\ y = \frac{25}{9};\ z = \frac{17}{6}\right]$

**104** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = -3 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -18 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}$ $[x_1 = 1;\ x_2 = -5;\ x_3 = 3;\ x_4 = -2]$

**105** $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 6 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 6 \\ -4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -2 \end{cases}$ $[x_1 = 2;\ x_2 = -1;\ x_3 = -2;\ x_4 = 1]$

**106** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$ $[x_1 = -2;\ x_2 = 3;\ x_3 = 0;\ x_4 = 1]$

**107** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$ $[x_1 = 5;\ x_2 = -3;\ x_3 = 1;\ x_4 = 0]$

**108** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$ $[x_1 = -1;\ x_2 = 1;\ x_3 = 0;\ x_4 = 1;\ x_5 = 0]$

**109** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$ $[x_1 = 1;\ x_2 = -1;\ x_3 = -1;\ x_4 = 0;\ x_5 = 1]$

**110** $\begin{cases} 3x + y = 2 + 3z + x \\ 2(x - y) = -(2 - z) \\ 2(2z - x) = 1 - y - x \end{cases}$ $\left[x = \frac{1}{3};\ y = \frac{4}{3};\ z = 0\right]$

**111** $\begin{cases} 3(2x + z) - 1 = z - 2y \\ 2z - y = 2(2 - x + y) \\ 4x + y = 3 - z \end{cases}$ $\left[x = \frac{5}{2};\ y = -\frac{13}{5};\ z = -\frac{22}{5}\right]$

**112** $\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \\ x_1 + x_3 = x_2 + x_4 - 1 \\ x_2 + x_3 = x_1 + x_4 - 2 \\ x_2 - x_4 = x_1 + x_3 \end{cases}$ $\left[x_1 = 0;\ x_2 = -\frac{1}{2};\ x_3 = -1;\ x_4 = \frac{1}{2}\right]$

**113** $\begin{cases} -x\ cos\ \alpha + y\ sen\ \alpha + z\ cos\ \alpha = -1 \\ x\ sen\ \alpha + y\ cos\ \alpha - z\ sen\ \alpha = 0 \\ x + y + z = cos\ \alpha - sen\ \alpha \end{cases}$ $[x = cos\ \alpha;\ y = -sen\ \alpha;\ z = 0]$



© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

**114** $\begin{cases} x \cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha + z = \cos 2\alpha \\ x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha + z = \operatorname{sen} 2\alpha \\ -x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha + z = -\cos 2\alpha \end{cases}$ $[x = \cos\alpha;\ y = \operatorname{sen}\alpha;\ z = 0]$

**115** $\begin{cases} x \cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha + z = 0 \\ x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha + z = 1 \\ -x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha + z = 0 \end{cases}$ $[x = \operatorname{sen}\alpha;\ y = \cos\alpha;\ z = 0]$

**116** $\begin{cases} x_1 \cos\alpha - x_2 \operatorname{sen}\alpha + x_3 + x_4 = 2\cos\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha \\ x_1 \operatorname{sen}\alpha + x_2 \cos\alpha + x_3 + x_4 = 2\operatorname{sen}\alpha \\ x_1 + x_2 + x_3 \cos\alpha + x_4 \operatorname{sen}\alpha = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 \operatorname{sen}\alpha + x_4 \cos\alpha = 0 \end{cases}$ con $\alpha \neq \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$

$[x_1 = 1;\ x_2 = -1;\ x_3 = \cos\alpha;\ x_4 = \operatorname{sen}\alpha]$

**117** $\begin{cases} x_1 \cos\alpha + x_2 \operatorname{sen}\alpha + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 \operatorname{sen}\alpha + x_2 \cos\alpha + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 \cos\alpha + x_4 \operatorname{sen}\alpha = 2\cos\alpha \\ x_1 + x_2 - x_3 \operatorname{sen}\alpha + x_4 \cos\alpha = 0 \end{cases}$ con $\alpha \neq \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$

$[x_1 = \cos\alpha;\ x_2 = \operatorname{sen}\alpha;\ x_3 = 1;\ x_4 = -1]$

## Teorema di Rouché-Capelli

**Determina quali dei seguenti sistemi sono possibili e quali impossibili.**

**118** $\begin{cases} x + y + z + w = 5 \\ 2x + 2y + 2z + 2w = 10 \\ 3x + 3y + 3z + 3w = 15 \end{cases}$ [possibile]

**119** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$ [impossibile]

**120** $\begin{cases} x_1 + 5x_3 - 3x_5 = 3 \\ -x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 4 \\ -x_1 - 2x_2 + 9x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 - 9x_5 = -3 \end{cases}$ [possibile]

**121** $\begin{cases} x - 3z + 2w = -1 \\ -7x + 6y - 6z + w = -7 \\ 3x - 2y + w = 2 \end{cases}$ [impossibile]

**122** $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x + 8y - 5z = 2 \\ x + 5y - 3z = 1 \end{cases}$ [possibile]

**123** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 8 \end{cases}$ [impossibile]

**124** $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 2y + 2z = -2 \\ -x + y = 0 \end{cases}$ [impossibile]

**125** $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$ [possibile]

**126** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 - 4x_5 = -4 \end{cases}$ [impossibile]

**127** $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ x + 3y + 5z = 7 \\ x + 4y + 7z = 10 \\ x + 5y + 9z = 13 \end{cases}$ [possibile]

**Risolvi i seguenti sistemi con un metodo a scelta, dopo aver verificato che essi sono possibili.**

**ESERCIZIO SVOLTO**

**128** $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = 1 \\ x - 3y + 5z = 2 \\ x - 4y + 7z = 3 \end{cases}$

Per verificare se il sistema dato, di quattro equazioni nelle tre incognite $x$, $y$, $z$, è possibile, controlliamo se la matrice dei coefficienti $A$ e la matrice completa $A'$ del sistema hanno lo stesso rango:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \qquad A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & -4 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$



© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

Osserviamo che nella matrice $A$ la terza colonna è combinazione lineare delle prime due, perché è l'opposto della somma della prima colonna con il doppio della seconda. Di conseguenza, ogni minore di ordine 3 estratto da $A$ sarà nullo, perché dovrà necessariamente contenere tutte e tre le colonne. Considerando il minore $|H|$ di $A$ costituito dalle prime due righe e dalle prime due colonne, $|H| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, possiamo affermare che $A$ ha rango 2.

Consideriamo ora la matrice $A'$. Anch'essa non può avere rango 3, in quanto la colonna dei termini noti è l'opposto della somma delle prime due colonne. Possiamo inoltre notare che la quarta colonna si ottiene anche dalla somma della seconda e della terza. Osserviamo che $A'$, contenendo il minore $|H|$ di $A$, che è diverso da zero, avrà rango 2 come $A$; quindi il sistema è possibile e ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni. Per risolverlo, consideriamo solo le prime due equazioni corrispondenti alle righe di $|H|$ : $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = 1 \end{cases}$

Applichiamo il metodo di eliminazione cercando di rendere nullo il coefficiente di $x$ nella seconda equazione e il coefficiente di $y$ nella prima; otteniamo quindi

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Quindi la soluzione del sistema dato risulta

$$x = z - 1 \wedge y = 2z - 1 \wedge z \in \mathbb{R}$$

**129** $\begin{cases} 3x - 5y - 3z = 1 \\ 2x - 3y + 3z = 4 \end{cases}$ $[x = 17 - 24z;\ y = 10 - 15z]$

**130** $\begin{cases} 3x + 5y + z = -2 \\ 5x + 8y - z = 1 \end{cases}$ $[x = 13z + 21;\ y = -8z - 13]$

**131** $\begin{cases} 3x - 10y - 6z = 0 \\ -2x + 7y + 3z = 5 \end{cases}$ $[x = 12z + 50;\ y = 3z + 15]$

**132** $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + 3z = 5 \\ x + 4y + 7z = 11 \end{cases}$ $[x = z - 1;\ y = 3 - 2z]$

**133** $\begin{cases} 2x + y + z - v = 3 \\ x - 2y - z + v = -1 \\ x + y - 2z + 3v = 3 \\ 3x + 6y + 7z - 8v = 8 \end{cases}$ $\left[x = \dfrac{15 - v}{14};\ y = \dfrac{17 - 3v}{14};\ z = \dfrac{19v - 5}{14}\right]$

**134** $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ x + 3y = 0 \\ -2x + 4y = -10 \\ 5x + 9y = 6 \\ 2x - 3y = 9 \end{cases}$ $[x = 3;\ y = -1]$

**135** $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x_1 - 3x_2 + \dfrac{3}{4}x_3 = \dfrac{5}{4} \\ x_1 - 6x_2 + \dfrac{3}{2}x_3 = \dfrac{5}{2} \\ -\dfrac{2}{3}x_1 + 4x_2 - x_3 = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$ $\left[x_1 = \dfrac{12x_2 - 3x_3 + 5}{2}\right]$

**136** $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \\ 3x + 4y + 5z = 6 \\ 4x + 5y + 6z = 7 \\ 5x + 6y + 7z = 8 \end{cases}$ $[x = z - 2;\ y = 3 - 2z]$

**137** $\begin{cases} 2x - 5y = 12 \\ -3x - 4y + z = 6 \\ x + 9y - z = -18 \\ 5x - y - z = 6 \\ 11x + 7y - 3z = -6 \end{cases}$ $\left[x = \dfrac{5z + 18}{23};\ y = \dfrac{2z - 48}{23}\right]$



© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

**138** $\begin{cases} x+y+2z=3 \\ x+2y+3z=5 \\ 2x+3y+5z=8 \\ 3x+5y+9z=14 \end{cases}$ $[x=0;\ y=1;\ z=1]$

**139** $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+5z=0 \\ 3x+y+3z=0 \end{cases}$ $[x=-2z;\ y=3z]$

**140** $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ x-y+2z=0 \\ 2x-y+2z=0 \end{cases}$ $[x=0;\ y=0;\ z=0]$

**141** $\begin{cases} x-y+z-v=0 \\ x-2y+3z-4v=0 \\ x-4y+7z-10v=0 \end{cases}$ $[x=z-2v;\ y=2z-3v]$

**142** $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3+7x_4=0 \\ 2x_1+4x_2+6x_3+8x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+7x_3+9x_4=0 \\ 4x_1+6x_2+8x_3+10x_4=0 \\ 5x_1+7x_2+9x_3+11x_4=0 \end{cases}$ $[x_1=x_3+2x_4;\ x_2=-2x_3-3x_4]$

**143** $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3-x_4+5x_5=0 \\ -2x_1-x_2+4x_3+3x_4-5x_5=0 \\ 4x_1+2x_2+10x_3+5x_5=0 \\ 3x_1+x_2+x_3+5x_4-10x_5=0 \end{cases}$ $\left[x_2=-\frac{43}{19}x_1;\ x_3=\frac{1}{19}x_1;\ x_4=-\frac{3}{19}x_1;\ x_5=0\right]$

**144** $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+2x_4+4x_5=4 \\ 2x_1+2x_2+5x_3+5x_4+10x_5=10 \\ 3x_1+3x_2+8x_3+8x_4+16x_5=16 \\ 4x_1+4x_2+14x_3+14x_4+28x_5=28 \end{cases}$ $[x_1=-x_2;\ x_4=2-2x_5-x_3]$

**145** $\begin{cases} 3x-4y+z-t=0 \\ x+11y-4z+2t=1 \\ 7x+3y-2z=1 \\ 10x-y-z-t=1 \\ 9x-12y+3z-3t=0 \end{cases}$ $\left[y=\frac{2z-7x+1}{3};\ t=\frac{37x-5z-4}{3}\right]$

**146** $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=5 \\ x_1+x_3+2x_4+x_5=5 \\ x_1+x_2+x_4+x_5=4 \\ x_1+2x_2+x_3+x_5=5 \\ x_2+x_3+x_4+2x_5=5 \end{cases}$ $[x_1=x_5;\ x_2=2-x_5;\ x_3=1;\ x_4=2-x_5]$

**147** $\begin{cases} 2x+3y-z-2v=0 \\ 4x-3y-5z+5v=0 \\ 8x+3y-7z+v=0 \end{cases}$ $\left[x=\frac{2z-v}{2};\ y=\frac{-z+3v}{3}\right]$

**148** $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3-2x_4+5x_5=0 \\ -x_1-3x_2+4x_3-2x_4-5x_5=0 \\ 2x_1+6x_2+x_3-2x_4-5x_5=0 \\ x_1+3x_2+5x_3-4x_4-10x_5=0 \end{cases}$ $\left[x_1=x_3-3x_2\,;\ x_4=\frac{3x_3-5x_5}{2}\right]$



© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

# Sistemi parametrici

**RICORDIAMO LA TEORIA**

Se si hanno equazioni parametriche, la risoluzione del sistema va preceduta da un'opportuna discussione per stabilire per quali valori del parametro il sistema risulta rispettivamente determinato, indeterminato o impossibile.

**ESERCIZIO SVOLTO**

149 Risolviamo il sistema $\begin{cases} x-2y=-6 \\ 2(k-1)x+y=4k \\ 2(2-k)x+ky=k \end{cases}$ $\boxed{1}$

Consideriamo la matrice dei coefficienti e la matrice completa del sistema:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2(k-1) & 1 \\ 2(2-k) & k \end{bmatrix} \qquad A'=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 2(k-1) & 1 & 4k \\ 2(2-k) & k & k \end{bmatrix}$$

Per determinare il rango di $A$ consideriamo il minore non nullo di ordine 1 costituito dall'elemento della prima riga e della prima colonna di $A$; esso si può orlare con gli elementi della seconda riga e della seconda colonna oppure con gli elementi della terza riga e della seconda colonna.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2(k-1) & 1 \end{vmatrix}=4k-3; \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2(2-k) & k \end{vmatrix}=8-3k$$

Il primo di tali minori si annulla per $k=3/4$, il secondo per $k=8/3$. Poiché non vi è nessun valore di $k$ per cui entrambi tali minori si annullino contemporaneamente, si può concludere che il rango di $A$ è certamente 2.
Determiniamo ora il rango di $A'$. Poiché i minori di $A$ sopra considerati sono anche minori di $A'$, il rango di $A'$ è maggiore o uguale a 2. Inoltre, essendo $A'$ una matrice quadrata di ordine 3, il suo rango è 3 se e solo se il suo determinante è diverso da zero.

Si ha $$|A'|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 2(k-1) & 1 & 4k \\ 2(2-k) & k & k \end{vmatrix}=(k-8)(4k-3) \longrightarrow |A'|=0 \iff k=8 \vee k=\frac{3}{4}$$

Perciò, se è $k=8 \vee k=\frac{3}{4}$, il rango di $A'$ è 2 e risulta uguale al rango di $A$: il sistema $\boxed{1}$ risulta possibile; se invece è $k \neq 8 \wedge k \neq \frac{3}{4}$ il rango di $A'$ è 3, ed essendo diverso dal rango di $A$, il sistema $\boxed{1}$ è impossibile.
Non ci resta che risolvere il sistema dato nei due casi in cui risulta possibile. Individuiamo una sottomatrice quadrata non singolare di $A$ di ordine 2, ad esempio $H$ formata dalla prima e dalla terza riga di $A$ (sappiamo infatti che il determinante di tale sottomatrice si annulla solo per $k=8/3$); consideriamo quindi la prima e la terza equazione, trascurando la seconda, e prendiamo come incognite $x$ e $y$, in quanto corrispondenti alle colonne di $H$.
Per $k=8$ il sistema diviene

$$\begin{cases} x-2y=-6 \\ -12x+8y=8 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$$

Per $k=\frac{3}{4}$ il sistema diviene

$$\begin{cases} x-2y=-6 \\ \frac{5}{2}x+\frac{3}{4}y=\frac{3}{4} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=-\frac{12}{23} \\ y=\frac{63}{23} \end{cases}$$

Riassumendo:

- $k \neq 8 \wedge k \neq \frac{3}{4}$ $\longrightarrow$ sistema impossibile;
- $k=8$ $\longrightarrow$ sistema determinato: $x=2 \wedge y=4$;
- $k=\frac{3}{4}$ $\longrightarrow$ sistema determinato: $x=-\frac{12}{23} \wedge y=\frac{63}{23}$.


© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

**150** $\begin{cases} \frac{5}{8}x - 3y = 20 \\ x - \frac{24}{5}y = k \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} k = 32 \longrightarrow \text{indeterminato con } \infty^1 \text{ soluzioni: } x = p;\ y = \frac{5p - 160}{24} \\ k \neq 32 \longrightarrow \text{impossibile} \end{array}\right]$

**151** $\begin{cases} kx + y = 2k - 3 \\ 2x - ky = 3k + 4 \end{cases}$ $[\forall k \in \mathbb{R} \longrightarrow \text{determinato: } x = 2;\ y = -3]$

**152** $\begin{cases} (a-2)x + ay = -a \\ (2-a)x + (2+a)y = -a^2 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} a = 2 \longrightarrow \infty^1 \text{ soluzioni: } x = p;\ y = -1 \\ a = -1 \longrightarrow \infty^1 \text{ soluzioni: } x = p;\ y = -3p - 1 \\ a \neq 2 \wedge a \neq -1 \longrightarrow \text{determinato: } x = \frac{a}{2};\ y = -\frac{a}{2} \end{array}\right]$

**153** $\begin{cases} ax + y = 1 - 2a \\ x + by = b - 2 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} ab = 1 \longrightarrow \text{indeterminato con } \infty^1 \text{ soluzioni: } x = p;\ y = -a(2+p) + 1 \\ ab \neq 1 \longrightarrow \text{determinato: } x = -2;\ y = 1 \end{array}\right]$

**154** $\begin{cases} \frac{x}{k} + \frac{y}{k-1} = -\frac{1}{k} \\ \frac{x}{k-1} + \frac{y}{k} = \frac{1}{k} \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} k = 0 \vee k = 1 \longrightarrow \text{perde significato} \\ k = \frac{1}{2} \longrightarrow \text{indeterminato con } \infty^1 \text{ soluzioni: } x = -1 + y \\ k \neq 0 \wedge k \neq 1 \wedge k \neq \frac{1}{2} \longrightarrow x = k - 1;\ y = 1 - k \end{array}\right]$

**155** $\begin{cases} 3x - ay + 2z = 0 \\ ax - 3y + 2z = 0 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} a \neq 3 \longrightarrow \infty^1 \text{ soluzioni: } x = -\frac{2p}{a+3};\ y = \frac{2p}{a+3};\ z = p \\ a = 3 \longrightarrow \infty^2 \text{ soluzioni: } x = p_1;\ y = p_2;\ z = \frac{3p_2 - 3p_1}{2} \end{array}\right]$

**156** $\begin{cases} x - \frac{y}{k-1} + z = 1 \\ \frac{x}{k+1} + y + z = \frac{1}{k+1} \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} k = \pm 1 \longrightarrow \text{perde significato} \\ k = 0 \longrightarrow \infty^2 \text{ soluzioni: } x = 1 - y - z \\ k \neq 0 \wedge k \neq \pm 1 \longrightarrow \infty^1 \text{ soluzioni: } x = 1 - \frac{k+1}{k}z;\ y = \frac{1-k}{k}z \end{array}\right]$

**157** $\begin{cases} 2x + ky = -3 \\ 6x + 3ky = k \\ 2x - y = -2 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} k \neq -9 \longrightarrow \text{impossibile} \\ k = -9 \longrightarrow \text{determinato: } x = -\frac{15}{16};\ y = \frac{1}{8} \end{array}\right]$

**158** $\begin{cases} mx + y = m^2 + 1 \\ my + z = m \\ x + mz = m \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} m = -1 \longrightarrow \infty^1 \text{ soluzioni: } x = t;\ y = t + 2;\ z = t + 1 \\ m \neq -1 \longrightarrow x = m;\ y = 1;\ z = 0 \end{array}\right]$

**159** $\begin{cases} \frac{x}{m} + y = 1 \\ x + \frac{y}{m} = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} m = 0 \longrightarrow \text{perde significato} \\ m = 1 \longrightarrow \text{indeterminato con } \infty^1 \text{ soluzioni: } x = p;\ y = 1 - p \\ m \neq 0 \wedge m \neq 1 \longrightarrow \text{impossibile} \end{array}\right]$

**160** $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + ky + z = 2 \\ -2x + y + kz = -2 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} k = -1 \longrightarrow \infty^1 \text{ soluzioni: } x = \frac{3-p}{3};\ y = \frac{p}{3};\ z = p \\ k = -5 \longrightarrow \infty^1 \text{ soluzioni: } x = 1 - 3p;\ y = -p;\ z = p \\ k \neq -1 \wedge k \neq -5 \longrightarrow \text{determinato: } x = 1;\ y = 0;\ z = 0 \end{array}\right]$

**161** $\begin{cases} 3x - 2y - z = -2 \\ kx + 4y + 2z = 4 \\ -2x - 2y + kz = -2 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} k = -1 \longrightarrow \infty^1 \text{ soluzioni: } x = 0;\ y = \frac{2-z}{2} \\ k = -6 \longrightarrow \infty^1 \text{ soluzioni: } x = -z;\ y = 1 - 2z \\ k \neq -1 \wedge k \neq -6 \longrightarrow \text{determinato: } x = 0;\ y = 1;\ z = 0 \end{array}\right]$

**162** $\begin{cases} \frac{x}{m} + y + z = 1 \\ x + \frac{y}{m} + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} m = 0 \longrightarrow \text{perde significato} \\ m = 1 \longrightarrow \text{indeterminato con } \infty^2 \text{ soluzioni: } x = 1 - y - z \\ m \neq 0 \wedge m \neq 1 \longrightarrow \text{determinato: } x = 0;\ y = 0;\ z = 1 \end{array}\right]$

**163** $\begin{cases} x + 3y - 2z = -12 \\ 2x - ky + 2z = 12 \\ -kx + y + 2z = 4 \\ x + y - 2z = -8 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} k = 3 \longrightarrow \text{determinato: } x = 0;\ y = -2;\ z = 3 \\ k = 1 \longrightarrow \text{determinato: } x = \frac{4}{3};\ y = -2;\ z = \frac{11}{3} \\ k \neq 3 \wedge k \neq 1 \longrightarrow \text{impossibile} \end{array}\right]$


© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

**164** $\begin{cases} x+3y-2z=-12 \\ kx-3y+2z=12 \\ -3x+y+2z=4 \\ x+y-kz=-8 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} k=2 \longrightarrow \text{determinato: } x=0;\ y=-2;\ z=3 \\ k=-1 \longrightarrow \text{determinato: } x=-\dfrac{36}{11};\ y=-\dfrac{40}{11};\ z=-\dfrac{12}{11} \\ k\neq 2 \wedge k\neq -1 \longrightarrow \text{impossibile} \end{array}\right]$

**165** $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-4x_4=12 \\ x_1-3x_2+x_4=0 \\ 3x_1-4x_2+x_3-3x_4=k \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} k=12 \longrightarrow \text{indeterminato con } \infty^2 \text{ soluzioni:} \\ \qquad x_1=3x_2-x_4;\ x_3=12-5x_2+6x_4 \\ k\neq 12 \longrightarrow \text{impossibile} \end{array}\right]$

**166** $\begin{cases} 3x_1-10x_2+x_3-6x_4=k \\ x_1-4x_2+x_3-8x_4=5 \\ 2x_1-6x_2+2x_4=0 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} k=5 \longrightarrow \text{indeterminato con } \infty^2 \text{ soluzioni:} \\ \qquad x_1=3x_2-x_4;\ x_3=5+x_2+9x_4 \\ k\neq 5 \longrightarrow \text{impossibile} \end{array}\right]$

**167** $\begin{cases} ax+by=1 \\ x+y=b \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} a=b=1 \longrightarrow \text{indeterminato: } y=1-x \\ a=b=-1 \longrightarrow \text{indeterminato: } y=-1-x \\ a=b\neq \pm 1 \longrightarrow \text{impossibile} \\ a\neq b \longrightarrow x=\dfrac{1-b^2}{a-b};\ y=\dfrac{ab-1}{a-b} \end{array}\right]$

**168** $\begin{cases} ax+y+3z=1 \\ x+ay+3z=1 \\ x+3y+az=1 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} a=1 \longrightarrow \text{indeterminato con } \infty^1 \text{ soluzioni: } x=p;\ y=z=\dfrac{1-p}{4} \\ a=3 \longrightarrow \text{indeterminato con } \infty^1 \text{ soluzioni: } x=y=p;\ z=\dfrac{1-4p}{3} \\ a=-4 \longrightarrow \text{impossibile} \\ a\neq 1 \wedge a\neq 3 \wedge a\neq -4 \longrightarrow \text{determinato: } x=y=z=\dfrac{1}{a+4} \end{array}\right]$

**169** $\begin{cases} 2x+y=0 \\ ax+2y=1 \\ 8x+4y=b \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} a\neq 4 \wedge b=0 \longrightarrow \text{determinato: } x=\dfrac{1}{a-4};\ y=-\dfrac{2}{a-4} \\ a=4 \vee b\neq 0 \longrightarrow \text{impossibile} \end{array}\right]$

**170** $\begin{cases} kx+y+z=k+2 \\ x+ky+z=k+2 \\ x+y+kz=k+2 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} k\neq -2 \wedge k\neq 1 \longrightarrow x=y=z=1 \\ k=1 \longrightarrow \infty^2 \text{ soluzioni: } x=3-p_1-p_2;\ y=p_1;\ z=p_2 \\ k=-2 \longrightarrow \infty^1 \text{ soluzioni: } x=p;\ y=p;\ z=p \end{array}\right]$

**171** $\begin{cases} ax_2+3x_3-ax_4=2 \\ ax_1+2ax_2-x_3=a \\ ax_1+ax_2-4x_3+ax_4=a-1 \end{cases}$

$[\forall a\in\mathbb{R} \longrightarrow \text{impossibile}]$

**172** $\begin{cases} 2x+ay=-1 \\ bx+y=0 \\ (b+2)x+(b+1)y=-1 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} a\neq b \wedge b\neq 0 \longrightarrow \text{impossibile} \\ b=0 \longrightarrow x=-\dfrac{1}{2} \wedge y=0 \\ a=b=\sqrt{2} \longrightarrow \text{impossibile} \\ a=b\neq \sqrt{2} \longrightarrow x=\dfrac{1}{a^2-2};\ y=-\dfrac{a}{a^2-2} \end{array}\right]$

**173** $\begin{cases} \dfrac{x}{m}+y+z=2m+1 \\ x+\dfrac{y}{m}+z=2m+1 \\ x+y+\dfrac{z}{m}=2m+1 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} m=0 \longrightarrow \text{perde significato} \\ m=1 \longrightarrow \infty^2 \text{ soluzioni: } x=3-y-z \\ m=-\dfrac{1}{2} \longrightarrow \infty^1 \text{ soluzioni: } x=z;\ y=z \\ m\neq 0 \wedge m\neq 1 \wedge m\neq -\dfrac{1}{2} \longrightarrow \text{determinato: } x=y=z=m \end{array}\right]$

**174** $\begin{cases} mx_1+x_2+x_3+x_4=m+1 \\ x_1+mx_2+x_3+x_4=2 \\ x_1+x_2+mx_3+x_4=m+1 \\ x_1+x_2+x_3+mx_4=2 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} m=-3 \longrightarrow \infty^1 \text{ soluzioni: } x_1=x_3=p;\ x_2=x_4=p-1 \\ m=1 \longrightarrow \infty^3 \text{ soluzioni: } x_1=p_1;\ x_2=p_2;\ x_3=p_3;\ x_4=2-p_1-p_2-p_3 \\ m\neq 1 \wedge m\neq -3 \longrightarrow x_1=x_3=1;\ x_2=x_4=0 \end{array}\right]$



© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

**175** $\begin{cases} kx+z=1 \\ x+z=1 \\ hx+kz=h+k \\ hx+y=h \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} h\neq 0 \wedge h\neq 1 \wedge k\neq 1 \longrightarrow \text{impossibile} \\ h\neq 0 \wedge h\neq 1 \wedge k=1 \longrightarrow x=\dfrac{h}{h-1};\ y=-\dfrac{h}{h-1};\ z=-\dfrac{1}{h-1} \\ h=0 \text{ e } k \text{ qualsiasi} \longrightarrow x=y=0;\ z=1 \\ h=1 \text{ e } k \text{ qualsiasi} \longrightarrow \text{impossibile} \end{array}\right]$

**176** $\begin{cases} ax_1+x_2+bx_3+x_4=2 \\ x_1+ax_2+x_3+bx_4=a+b \\ ax_1+bx_3=0 \\ ax_2+bx_4=a+b \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} a=b \longrightarrow \infty^2 \text{ soluzioni: } x_1=-x_3;\ x_2=2-x_4 \\ a\neq b \longrightarrow \text{determinato: } x_1=0;\ x_2=1;\ x_3=0;\ x_4=1 \end{array}\right]$

**177** $\begin{cases} ax+ay+bz=b \\ bx+ay+bz=a \\ ax+by+az=b \\ bx+by+az=a \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} a=b=0 \longrightarrow \infty^3 \text{ soluzioni: } x=p;\ y=q;\ z=r \\ a=b\neq 0 \longrightarrow \infty^2 \text{ soluzioni: } x=p;\ y=q;\ z=1-p-q \\ a=-b\neq 0 \longrightarrow \infty^1 \text{ soluzioni: } x=-1;\ y=p;\ z=p \\ a\neq \pm b \longrightarrow \text{determinato: } x=-1;\ y=1;\ z=1 \end{array}\right]$

**178** $\begin{cases} x_1+(2m+2)x_2+2mx_3+(2m+2)x_4=0 \\ (2m+1)x_2+2mx_3+(2m+1)x_4=0 \\ mx_1+(m+1)x_2+x_3+(m+2)x_4=1 \\ mx_1+mx_2+(m+1)x_4=1 \end{cases}$

$[\forall m\in\mathbb{R} \longrightarrow x_1=x_3=0;\ x_2=-1;\ x_4=1]$

**179** $\begin{cases} ax+y+bz=1 \\ x+y+az=1 \\ x+ay-bz=1 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} a=0 \vee a=-1 \longrightarrow \text{impossibile} \\ a=1 \longrightarrow \infty^1 \text{ soluzioni: } x=1-p;\ y=p;\ z=0 \\ a\neq 0 \wedge a\neq \pm 1 \longrightarrow x=\dfrac{a-b}{a(a+1)};\ y=\dfrac{a+b}{a(a+1)};\ z=\dfrac{-1+a}{a(a+1)} \end{array}\right]$

**180** $\begin{cases} ax_1+ax_2+bx_3+bx_4=1 \\ bx_1+ax_2+bx_3+ax_4=1 \\ ax_1+bx_2+ax_3+bx_4=1 \\ bx_1+bx_2+ax_3+ax_4=1 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} a=b=0 \longrightarrow \text{indeterminato con } \infty^4 \text{ soluzioni: } x_1=p;\ x_2=q;\ x_3=r;\ x_4=s \\ a=b\neq 0 \longrightarrow \text{indeterminato con } \infty^3 \text{ soluzioni: } x_1=p;\ x_2=q;\ x_3=r;\ x_4=\dfrac{1}{a}-p-q-r \\ a=-b\neq 0 \longrightarrow \text{impossibile} \\ a\neq \pm b \longrightarrow \text{indeterminato con } \infty^1 \text{ soluzioni: } x_1=x_4=p;\ x_2=x_3=\dfrac{1-p(a+b)}{a+b} \end{array}\right]$



© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

# Laboratorio di matematica

## Risoluzione dei sistemi lineari in Derive

Il programma *Derive* consente di risolvere in modo immediato i sistemi lineari.
Risolviamo ad esempio il sistema

$$\begin{cases} 2v + x + y + z = 8 \\ v + 2x + y + z = 0 \\ v + x + 2y + z = 4 \\ v + x + y + 2z = 3 \end{cases} \qquad \boxed{1}$$

Un sistema di equazioni è rappresentato in *Derive* mediante un vettore di equazioni; per inserirlo, perciò, potremmo scrivere le quattro equazioni tra parentesi quadre, separate da virgole (espressione **#1** di **FIGURA 4** a pagina 41). *Derive* consente però di immettere e risolvere immediatamente un sistema mediante la seguente procedura.
Dal menu **Risolvi** scegliamo **Sistema...** (**FIGURA 1**); compare la finestra **Imposta risoluzione sistema**; inseriamo, nella casella **Numero**, il numero di equazioni di cui è composto il sistema che vogliamo inserire, oppure impostiamo tale numero servendoci dei pulsanti con le freccette a destra di tale casella, e quindi clicchiamo su **OK** (**FIGURA 2**).

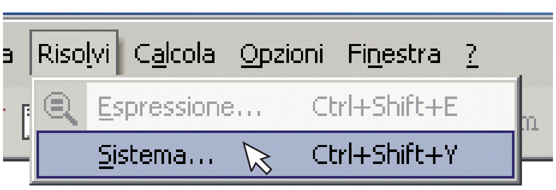


FIGURA 1

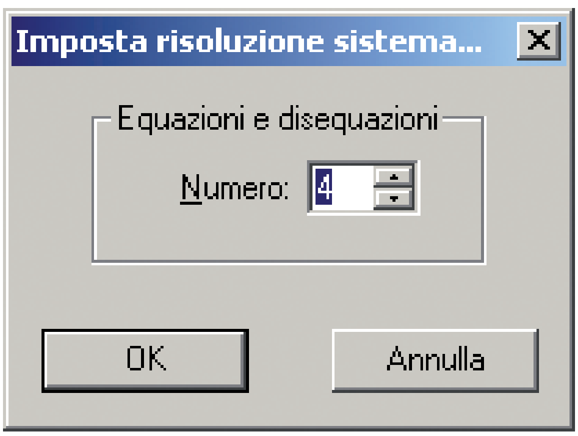


FIGURA 2

Compare ora la finestra **Risolvi 4 equazioni** (**FIGURA 3**); scriviamo negli appositi spazi le equazioni che costituiscono il sistema e quindi clicchiamo nella casella **Variabili della soluzione** dove occorre specificare quali sono le incognite del sistema. *Derive* ci propone automaticamente $v$, $x$, $y$, $z$. Clicchiamo su **Risolvi** e apparirà la soluzione (espressione **#2** di **FIGURA 4**).


© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

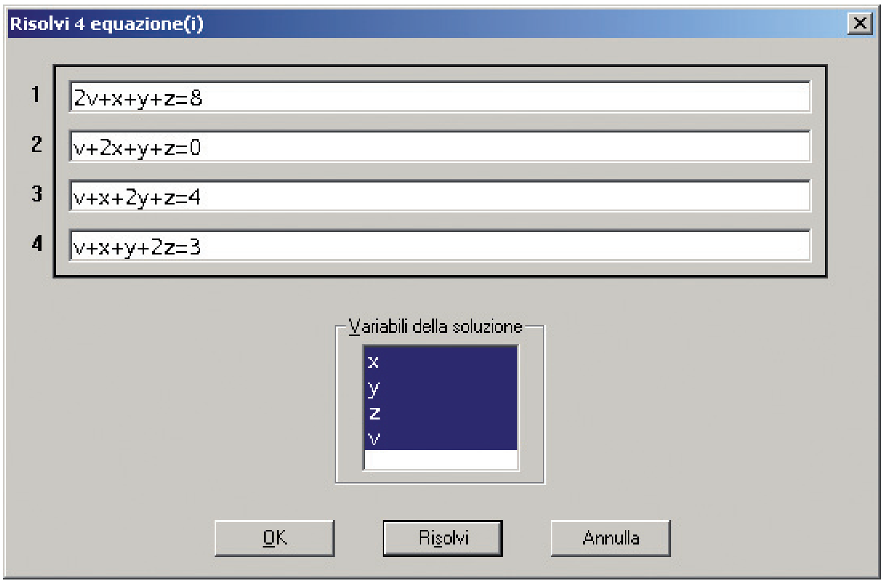


**FIGURA 3**

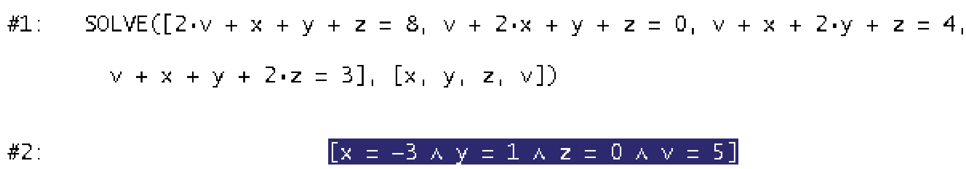


**FIGURA 4**

Se il sistema è impossibile, *Derive* fornisce come risposta un coppia di parentesi quadre vuote, ossia [ ].

Se il sistema è indeterminato, *Derive* fornisce come risposta un sistema semplificato, contente un numero inferiore di equazioni rispetto a quello dato ed equivalente ad esso.
Ad esempio le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x - y - 2z = 1 \\ 3x - z = 3 \end{cases}$$

sono proposte da *Derive* nella forma

$$x - \frac{z}{3} = 1 \wedge y + \frac{5 \cdot z}{3} = 0$$

In effetti il sistema è indeterminato e ha $\infty^1$ soluzioni.
Risolviamo allora il sistema con *Derive* solo rispetto alle incognite $x$ e $y$, ottenendo

$$x = \frac{z-3}{3} \wedge y = -\frac{5 \cdot z}{3}$$

A questo punto, ponendo ad esempio $z = p$ possiamo scrivere le soluzioni nella forma più familiare

$$x = \frac{p-3}{3}, \; y = -\frac{5 \cdot p}{3}, \; z = p$$

## Esercitazioni proposte

Con le nozioni apprese si possono eseguire rapidamente gli esercizi proposti nella relativa sezione del capitolo.



© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

# Soluzioni dei quesiti a risposta multipla e degli esercizi vero/falso

| | |
|---|---|
| 4 | F |
| 5 | V |
| 6 | F |
| 7 | V |
| 8 | F |
| 9 | V |
| 10 | V |
| 11 | V |
| 12 | b |
| 13 | b; d |
| 16 | V |
| 17 | F |
| 18 | F |
| 19 | V |
| 20 | V |
| 21 | V |
| 78 | V |
| 79 | F |
| 80 | V |
| 81 | V |
| 82 | V |
| 83 | V |
| 84 | F |
| 85 | d |
| 86 | b |
| 87 | a |


© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara