ELEMENTI DI GEOMETRIA DELLO SPAZIO

Lo spazio euclideo è un insieme infinito di elementi detti *punti* e contiene sottoinsiemi propri ed infiniti detti *piani*.
In ogni piano valgono gli assiomi del piano euclideo.
Ogni punto appartiene ad infinite rette dello spazio, l'insieme delle quali si dice *stella di rette*.
Ogni punto appartiene ad infiniti piani: il loro insieme si dice *stella di piani*.
Ogni retta *r* appartiene ad infiniti piani; il loro insieme si dice *fascio proprio di piani*; *r* è detta *asse* del fascio.

ASSIOMI

a) Per tre punti non allineati passa uno ed un solo piano.
b) Se due punti di una retta appartengono a un piano, essa giace interamente sul piano.
c) Se due piani distinti hanno in comune un punto, essi hanno in comune un'intera retta.
d) Ogni piano divide lo spazio in due insiemi infiniti e disgiunti, detti *semispazi aperti* .

POSIZIONI RECIPROCHE

• retta - retta
Due rette distinte nello spazio possono essere :
- *complanari*: esiste un piano che le contiene. In tal caso possono essere *incidenti o parallele.*
- *sghembe*: non esiste un piano che le contenga entrambe.

• retta – piano
Una retta e un piano nello spazio possono essere :
- *incidenti:* se hanno un solo punto in comune.
- *paralleli:* se non hanno punti in comune, oppure se li hanno tutti.

Se una retta è parallela ad una retta di un piano, essa è parallela al piano.

• piano – piano
Due piani distinti nello spazio possono essere :
- *incidenti* se hanno una retta in comune.
- *paralleli* se non hanno punti in comune. La relazione di parallelismo tra piani, così come quella tra rette, gode della proprietà simmetrica, di quella riflessiva e di quella transitiva; si tratta perciò di una relazione di equivalenza. L'insieme di tutti i piani paralleli ad un piano dato si dice fascio improprio di piani ed individua in modo univoco l'insieme di tutte le rette perpendicolari ad uno di essi (*giacitura* del piano).

Le intersezioni di piani paralleli con un piano incidente sono rette parallele. Per un punto esterno ad un piano si può condurre uno ed un solo piano parallelo al piano dato.
La parte di spazio compresa tra due piani paralleli si dice *strato*.

Teorema di Talete nello spazio
Un fascio di piani paralleli determina su due rette trasversali segmenti corrispondenti direttamente proporzionali.

Retta e piano perpendicolari
Per definire il concetto di perpendicolarità tra retta e piano abbiamo bisogno di due premesse (due teoremi) che fanno riferimento all'idea di perpendicolarità di due rette:
Teorema - *Se una retta è perpendicolare a due rette che passano per un suo punto, è pure perpendicolare a tutte le altre rette passanti per quel punto e giacenti nel piano individuato dalle prime due.*

1 Ciò significa in particolare che ogni semispazio è una figura convessa. Prova a dimostrarlo ricordando che una figura si dice convessa se per ogni coppia
di punti A e B appartenenti alla figura anche il segmento AB appartiene alla figura.
2 Le due rette trasversali sono, in generale, sghembe tra loro. Se le due rette sono complanari il teorema si riduce al teorema di Talete nel piano.
Come conseguenza del teorema precedente si dimostra anche il seguente: *Tutte le rette perpendicolari ad una retta data in un suo punto giacciono sullo stesso piano.*
Ora siamo in grado di dare la definizione: una retta ed un piano si dicono *perpendicolari* quando la retta interseca il piano ed è perpendicolare a tutte le rette del piano che passano per il punto di intersezione, detto *piede della perpendicolare*.

- *Dati un punto e un piano, esiste una sola retta passante per il punto e perpendicolare al piano.*
- *Dati un punto e una retta, esiste un solo piano passante per il punto e perpendicolare alla retta.*
- *Piani perpendicolari alla stessa retta sono paralleli tra loro.*
- *Rette perpendicolari allo stesso piano sono parallele tra loro.*

Teorema delle tre perpendicolari

Se dal piede di una perpendicolare a ad un piano si conduce la perpendicolare c ad una retta qualunque r del piano, questa (r) risulta perpendicolare al piano (ac) individuato dalle prime due.

PROIEZIONI

- *Proiezione di un punto* su un piano è il piede della perpendicolare condotta dal punto al piano. La lunghezza del segmento che ha per estremi il punto e la sua proiezione sul piano si dice *distanza del punto dal piano.* Se una retta è parallela ad un piano tutti i suoi punti sono equidistanti dal piano; tale distanza si dice *distanza della retta dal piano.*
- *La proiezione di una retta su un piano non perpendicolare ad essa è una retta.*

DIEDRI

Una *figura* è un insieme di punti. Utilizzando questa semplice definizione si accettano anche *figure* molto "strane", come i frattali.
Si definisce ***diedro*** ciascuna delle due parti di spazio delimitate da due semipiani che hanno la stessa origine, compresi i semipiani stessi. I due semipiani prendono il nome di *facce* del diedro e la loro origine comune di *spigolo* del diedro.
Un diedro è convesso se è una figura convessa, concavo se non lo è.

Si dice *sezione normale di un diedro* l'angolo che si ottiene intersecando il diedro con un piano perpendicolare al suo spigolo. Tale definizione è ben posta in quanto si dimostra che: *le sezioni normali di uno stesso diedro sono congruenti.*
Inoltre *diedri congruenti hanno sezioni normali congruenti e viceversa.*
Si dice *ampiezza di un diedro* l'ampiezza della sua sezione normale. In particolare un diedro la cui ampiezza è un angolo retto si dice *diedro retto*. Due *piani* incidenti si dicono *perpendicolari* se formano quattro diedri retti. Se si associa a un diedro la sua sezione normale e viceversa, si ottiene una corrispondenza biunivoca; tale corrispondenza permette la trasposizione ai diedri di tutta la terminologia degli angoli (Es: diedri acuti, diedri adiacenti, diedri opposti allo spigolo.....)