Matrici

- Nozioni fondamentali
- Algebra delle matrici
- Determinanti di matrici quadrate
- Inversa di una matrice
- Rango di una matrice

Nozioni fondamentali

1 Introduzione

In questo capitolo affronteremo lo studio delle matrici, che sono tabelle di elementi ordinati per righe e colonne.
Dopo aver visto alcune definizioni fondamentali, ci occuperemo dell'algebra delle matrici, imparando quindi le operazioni tra matrici e le relative proprietà: studieremo la somma e il prodotto scalare tra matrici, che (come vedremo) non va confuso con il prodotto di una matrice per uno scalare, cioè per un numero.
Assoceremo quindi a ogni matrice quadrata una quantità fondamentale, il suo determinante, di cui vedremo diversi utilizzi, e scopriremo inoltre come calcolare l'inversa di una matrice invertibile.
Infine, affronteremo il concetto di rango di una matrice.
Spesso le matrici costituiscono un argomento che lo studente non apprezza pienamente, a causa forse dell'artificiosità di alcune definizioni, come quella ad esempio del prodotto tra matrici. Proseguendo negli studi, si può invece comprendere l'enorme utilità delle matrici, che, permettendo di esprimere in maniera sintetica ed elegante i concetti più svariati, hanno consentito ai matematici di arrivare a importanti generalizzazioni in diverse teorie matematiche.

2 Definizioni

DEFINIZIONE MATRICE

Detti m ed n due numeri interi positivi e considerati $m \cdot n$ numeri reali, si chiama **matrice** *(rettangolare) di tipo* (m, n) l'insieme degli $m \cdot n$ numeri considerati, disposti ordinatamente su m righe e su n colonne, come nello schema che segue:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

I numeri reali racchiusi nella tabella si dicono *elementi* della matrice e sono rappresentati da una lettera munita di due indici: il primo indice fornisce la riga a cui appartiene l'elemento e il secondo la colonna. Ad esempio, l'elemento a_{32} si trova all'incrocio tra la terza riga e la seconda colonna; le righe e le colonne si contano rispettivamente a partire dall'alto e da sinistra, come è naturale.

Le matrici si indicano di solito con lettere maiuscole e si scrive, sinteticamente,

$$A = [a_{ik}] \quad \text{con} \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Se $m = n$ si ha una **matrice quadrata** (di ordine n).

ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \sqrt{3} \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & \sqrt{11} & 0 \end{bmatrix}$$

sono rispettivamente una matrice rettangolare di tipo $(2, 3)$ e una matrice quadrata di ordine 3. Con ovvio significato dei simboli si ha, ad esempio: $a_{22} = 3$, $a_{13} = \sqrt{3}$, $b_{12} = 0$, $b_{32} = \sqrt{11}$, ...

DEFINIZIONI MATRICE RIGA, MATRICE COLONNA

Si chiama **matrice riga** o **vettore riga** una matrice di ordine $(1, n)$, cioè formata da una sola riga; si chiama **matrice colonna** o **vettore colonna** una matrice di ordine $(m, 1)$, cioè formata da una sola colonna.

DEFINIZIONE MATRICE NULLA

La **matrice nulla** o **matrice zero** è la matrice i cui elementi sono tutti uguali a zero; si indica con

$$Z = [z_{ik}], \ z_{ik} = 0 \quad \text{con} \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

DEFINIZIONE MATRICI UGUALI

Due matrici dello stesso tipo sono **uguali**, e scriveremo $A = B$, se hanno uguali tutti gli elementi corrispondenti.

DEFINIZIONE MATRICE OPPOSTA

La **matrice opposta** di A, che viene indicata con il simbolo $-A$, è la matrice, dello stesso tipo di A, i cui elementi sono gli opposti dei corrispondenti elementi di A.

DEFINIZIONE MATRICE TRASPOSTA

Data una matrice A di tipo (m, n) si definisce **trasposta** di A, e si indica con A_T, la matrice di tipo (n, m) che si ottiene da A scambiando ordinatamente le righe con le colonne.

È del tutto evidente che $(A_T)_T = A$, cioè la trasposta della trasposta di A, è la stessa matrice A.

ESEMPIO

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

si ha

$$-A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}; \quad A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (A_T)_T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = A$$

3 Diagonale principale e diagonale secondaria di una matrice quadrata

DEFINIZIONI DIAGONALE PRINCIPALE, DIAGONALE SECONDARIA

Se A è una matrice quadrata di ordine n, si chiama **diagonale principale** di A l'insieme degli elementi a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} che hanno i due indici uguali.
La **diagonale secondaria** di A è l'insieme degli elementi a_{1n}, $a_{2,\, n-1}$, ..., a_{n1} i cui indici hanno per somma $n+1$.

ESEMPIO

Consideriamo la seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 & 1/2 \\ 2 & 0 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

diagonale secondaria

diagonale principale

Si tratta di una matrice quadrata di ordine 4. La sua diagonale principale è costituita dagli elementi 1, -1, 5, 2, mentre la sua diagonale secondaria ha per elementi 5, 1, 0, -2.

4 Matrici diagonali e triangolari. Matrice unità

DEFINIZIONE MATRICE DIAGONALE

Si dice che una matrice quadrata è **diagonale** se sono nulli tutti i suoi elementi tranne quelli che costituiscono la diagonale principale.

DEFINIZIONE MATRICE TRIANGOLARE

Una matrice quadrata si dice **triangolare superiore** se tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale sono nulli.
Una matrice quadrata è detta **triangolare inferiore** se tutti gli elementi al di sopra della diagonale principale sono nulli.

DEFINIZIONE MATRICE UNITÀ

Si chiama **matrice unità** o **matrice identica** (di ordine n) quella matrice diagonale i cui elementi, sulla diagonale principale, sono tutti uguali a 1.

Indicheremo la matrice unità con il simbolo I o, eventualmente, I_n per specificarne l'ordine.

ESEMPIO

Delle seguenti matrici A è una matrice diagonale di ordine 3, B è triangolare superiore di ordine 4 e I_4 è la matrice unità di ordine 4

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Algebra delle matrici

5 Somma delle matrici

Consideriamo ora l'operazione di addizione tra matrici, la cui definizione è molto intuitiva.

DEFINIZIONE SOMMA DI MATRICI

Si definisce **somma** di due matrici A e B dello stesso tipo (ossia con lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne), la matrice, dello stesso tipo di A e di B, i cui elementi sono la somma dei corrispondenti elementi delle matrici date. Tale matrice somma viene indicata con $A+B$.

La **differenza** di due matrici si può definire come somma della prima matrice con l'opposto della seconda: $A-B=A+(-B)$.

ESEMPIO

Se è $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, risulta

$$A+B=\begin{bmatrix} 2+3 & 3+1 & -1+0 \\ 0+2 & -5+3 & 4-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

e

$$A-B=\begin{bmatrix} 2-3 & 3-1 & -1-0 \\ 0-2 & -5-3 & 4-(-1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

6 Prodotto di una matrice per uno scalare

Anche la definizione di prodotto di una matrice per uno scalare è intuitiva.

DEFINIZIONE PRODOTTO DI UNA MATRICE PER UNO SCALARE

Si chiama **prodotto della matrice** A **per uno scalare** α (cioè per il numero reale α) la matrice che si ottiene da A moltiplicando tutti i suoi elementi per α.

ESEMPIO

Sia $A=\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$. Risulta: $2A=2\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & -12 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}$; $\frac{1}{3}A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

7 Prodotto scalare di una matrice riga per una matrice colonna

Affrontiamo adesso la definizione del prodotto tra matrici che, come vedremo, è alquanto laboriosa. Per prima cosa è necessario introdurre il prodotto di una matrice riga per una matrice colonna. Consideriamo nell'ordine una matrice riga A di tipo $(1,\ s)$ e una matrice colonna B di tipo $(s,\ 1)$:

$$A=[a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1s}] \qquad B=\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{s1} \end{bmatrix}$$

Definiamo **prodotto scalare** di A per B la matrice P di tipo $(1,\ 1)$ che ha per elemento il numero che si ottiene sommando i prodotti del tipo $a_{1j}\ b_{j1}$ con $j = 1, 2, ..., s$. Osserviamo che tale matrice è costituita da un solo numero, cioè è uno scalare.

$$P = A \cdot B = [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + ... + a_{1s}b_{s1}] = \left[\sum_{j=1}^{s} a_{1j}b_{j1}\right]$$

NOTA BENE

$\sum_{j=1}^{s} a_{1j}\, b_{j1}$ si legge "sommatoria per j che va da 1 a s di $a_{1j}\, b_{j1}$".

ESEMPIO

Date le matrici $A = [1 \quad 2 \quad 4]$ e $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, si ottiene

$$P = A \cdot B = [1 \quad 2 \quad 4] \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = [1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 2] = [21]$$

8 Prodotto di matrici

Siano A una matrice di tipo $(m,\ s)$ e B una matrice di tipo $(s,\ n)$. Le due matrici siano dunque tali che il numero delle colonne della prima sia uguale al numero delle righe della seconda (*matrici conformabili rispetto alla moltiplicazione*).

Si definisce **prodotto** (*righe per colonne*) della matrice A di tipo $(m,\ s)$ per la matrice B di tipo $(s,\ n)$ la matrice P di tipo $(m,\ n)$ il cui generico elemento p_{ik} si ottiene moltiplicando scalarmente la i-esima riga di A per la k-esima colonna di B:

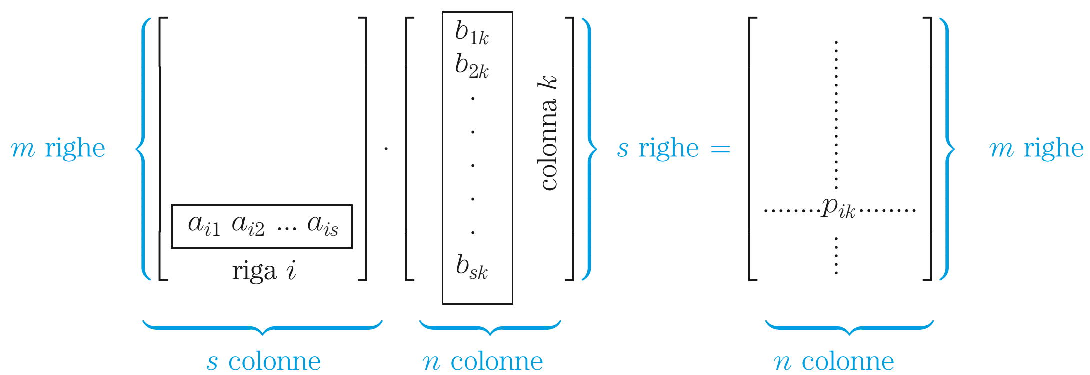
$$P = A \cdot B = [p_{ik}] = \left[\sum_{j=1}^{s} a_{ij}b_{jk}\right],$$

con $i = 1,\ 2,\ ...,\ m$ e $k = 1,\ 2,\ ...,\ n$

ATTENZIONE!

Il prodotto righe per colonne tra matrici si può effettuare solo se il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda.

Schematicamente si ha



Osserviamo che il punto che indica il prodotto tra matrici può anche essere omesso, come si usa fare con il punto che indica il prodotto tra numeri. Si noti, inoltre, che potrebbe essere definito il prodotto colonne per righe di matrici di tipo $(s,\ m)$ per matrici di tipo $(n,\ s)$.

ESEMPIO

Calcoliamo il prodotto delle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Osserviamo che le due matrici sono conformabili rispetto alla moltiplicazione essendo A di tipo $(3,\ 2)$ e B di tipo $(2,\ 4)$. La matrice prodotto P sarà quindi di tipo $(3,\ 4)$. Calcoliamo dunque i 12 elementi di P; l'elemento p_{11} sarà il prodotto scalare della prima riga di A per la prima colonna di B, l'elemento p_{12} sarà il prodotto scalare della prima riga di A per la seconda colonna di B e così via...:

$$p_{11} = [2 \ \ 1]\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 6; \quad p_{12} = [2 \ \ 1]\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 7; \quad \text{ecc.}$$

Proseguendo in questo modo, possiamo calcolare gli altri elementi della matrice prodotto e verificare che si ottiene

$$P = A \cdot B = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 2 & 7 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \\ 9 & 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

9 Proprietà delle operazioni

Le operazioni ora definite godono delle seguenti proprietà.

1. **Proprietà distributiva del prodotto di una matrice per uno scalare rispetto alla somma di matrici:**
$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$
2. **Proprietà distributiva del prodotto di una matrice per uno scalare rispetto alla somma di scalari:**
$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$
3. **Proprietà associativa del prodotto di una matrice per uno scalare:**
$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$$
4. **Prodotto per 1 e per -1:**
$$1 \cdot A = A; \quad (-1) \cdot A = -A$$
5. **Proprietà commutativa della somma:**
$$A + B = B + A$$
6. **Proprietà associativa della somma e del prodotto:**
$$A + (B + C) = (A + B) + C; \quad A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$
7. **Proprietà distributive (sinistra e destra) del prodotto rispetto alla somma:**
$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C; \quad (B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$$

Le proprietà dalla **1** alla **5** e la prima delle **6** sono conseguenza immediata delle proprietà delle operazioni aritmetiche. Dimostriamo, a titolo di esempio, la **2**.

Occorre dimostrare che è $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

Dimostrazione

Consideriamo il generico elemento di riga i e colonna k della matrice $(\alpha + \beta)A$: esso è $(\alpha + \beta)a_{ik}$. Il corrispondente elemento della matrice $\alpha A + \beta A$ è dato dalla somma degli elementi di riga i e colonna k delle matrici αA e βA; essi sono rispettivamente αa_{ik} e βa_{ik} e la loro somma è $\alpha a_{ik} + \beta a_{ik} = (\alpha + \beta)a_{ik}$.
Pertanto le due matrici $(\alpha + \beta)A$ e $\alpha A + \beta A$, avendo uguali tutti gli elementi corrispondenti, sono uguali. c.v.d.

Analoghe sono le dimostrazioni delle proprietà **1**, **3**, **4**, **5** che lasciamo al lettore per esercizio. Più complesse sono le dimostrazioni della seconda delle **6** e delle **7**. Dimostriamo la prima della **7**, lasciando come esercizio la dimostrazione delle altre.

Occorre dimostrare che è $A(B + C) = AB + AC$.

Dimostrazione

Consideriamo il generico elemento di riga i e colonna k della matrice $A \cdot (B+C)$. Esso è il prodotto scalare della riga i della matrice A per la colonna k della matrice $B+C$, ossia

$$[a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{in}]\begin{bmatrix} b_{1k}+c_{1k} \\ b_{2k}+c_{2k} \\ \dots \\ b_{nk}+c_{nk} \end{bmatrix} = a_{i1}(b_{1k}+c_{1k}) + a_{i2}(b_{2k}+c_{2k}) + \dots + a_{in}(b_{nk}+c_{nk})$$

Il generico elemento di riga i e colonna k della matrice $AB+AC$ è dato dalla somma dei corrispondenti elementi delle matrici AB e AC, ossia

$$[a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{in}]\begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \dots \\ b_{nk} \end{bmatrix} + [a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{in}]\begin{bmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \dots \\ c_{nk} \end{bmatrix} =$$

$$= (a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}) + (a_{i1}c_{1k} + a_{i2}c_{2k} + \dots + a_{in}c_{nk}) =$$

$$= a_{i1}(b_{1k}+c_{1k}) + a_{i2}(b_{2k}+c_{2k}) + \dots + a_{in}(b_{nk}+c_{nk})$$

Pertanto le due matrici $A(B+C)$ e $AB+AC$, avendo uguali tutti gli elementi corrispondenti, sono uguali. c.v.d.

È importante rilevare che **il prodotto tra matrici non gode della proprietà commutativa**, ossia, in generale è $A \cdot B \neq B \cdot A$ (si veda il successivo ESEMPIO 1). Ciò non esclude che in casi particolari sia $A \cdot B = B \cdot A$.
Per tale motivo è necessario formulare due proprietà distributive distinte: infatti, in mancanza della proprietà commutativa del prodotto, non è lecito dedurre l'una dall'altra.

Inoltre, **non vale per le matrici la legge di annullamento del prodotto**, ossia il prodotto di due matrici può essere la matrice nulla senza che nessuno dei fattori sia la matrice nulla (ESEMPIO 2).
Infine la **matrice unità**, definita al PARAGRAFO 4, è **elemento neutro rispetto al prodotto**, ossia non muta le matrici con cui viene moltiplicata:

$$A \cdot I_n = A; \quad I_n \cdot B = B$$

ESEMPI

1 Verifichiamo con un esempio che il prodotto di matrici non gode della proprietà commutativa.

Consideriamo le matrici $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Si ha $$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 13 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$

e quindi è $A \cdot B \neq B \cdot A$.
Ricordiamo però che, *in casi particolari*, può risultare $A \cdot B = B \cdot A$. Possiamo verificare che ciò accade, ad esempio, se A e B sono matrici diagonali dello stesso ordine.

2 Si ha $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Si verifica così che il prodotto di due matrici, nessuna delle quali è la matrice nulla, può essere la matrice nulla: per il prodotto tra matrici non vale la legge di annullamento del prodotto.

3 Siano A, B, C le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo $A \cdot C + B \cdot C$ e verifichiamo che risulta uguale a $(A+B) \cdot C$ (proprietà distributiva destra del prodotto rispetto alla somma). Si ha

$$A \cdot C + B \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 & 4 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(A+B) \cdot C = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Si ha quindi $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

Si può verificare che è anche $C \cdot (A+B) = C \cdot A + C \cdot B$.

10 Potenza di una matrice quadrata

Si può definire la **potenza n-esima di una matrice quadrata** nel modo seguente:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ volte}} \qquad (n \geq 2)$$

Determinanti di matrici quadrate

11 Definizione

A una matrice quadrata può essere associato un valore numerico, detto **determinante**, secondo le modalità che vedremo tra poco. Alle matrici rettangolari di tipo (m, n), con $m \neq n$, invece, non viene associato alcun valore numerico.

Sia dunque

$$A = [a_{ij}] \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

una *matrice quadrata* di ordine n. Il suo determinante verrà indicato con uno dei seguenti simboli

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ATTENZIONE!

Non confondere il simbolo di determinante con quello di modulo.

Nel caso particolare di matrice (quadrata) di ordine 1, cioè $A = [a_{11}]$, si pone

$$\det A = |A| = |a_{11}| = a_{11}$$

Nel caso delle matrici quadrate di ordine 2, il determinante si definisce nel seguente modo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

ESEMPI

1 Se $A = [-5]$ allora $|A| = -5$.

2 Se $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ allora $|B| = 3 \cdot (-4) - (-2) \cdot 1 = -10$

3 Se $C = \begin{bmatrix} sen\,\alpha & cos\,\alpha \\ -cos\,\alpha & sen\,\alpha \end{bmatrix}$ allora $|C| = sen^2\alpha - (-cos^2\alpha) = sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

4 Risolvere l'equazione

$$\begin{vmatrix} x & x-1 \\ x^2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando il determinante, si ottiene $2x - x^2(x-1) = 0$, ossia

$$x(2 - x^2 + x) = 0 \longrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 2$$

12 Minore complementare. Complemento algebrico

Per estendere la definizione di determinante a una matrice di ordine superiore al secondo, occorre premettere le seguenti definizioni.

DEFINIZIONE MINORE COMPLEMENTARE

Si dice **minore complementare** di un elemento di una matrice quadrata di ordine n il determinante che si ottiene sopprimendo dalla matrice data la riga e la colonna alle quali l'elemento appartiene.

Il minore complementare di un elemento di una matrice di ordine n risulta quindi un determinante di ordine $(n-1)$.

DEFINIZIONE COMPLEMENTO ALGEBRICO

Si dice **complemento algebrico** di un elemento a_{ik} di una matrice A di ordine n il minore complementare di a_{ik}, preceduto dal segno $+$ o dal segno $-$, a seconda che, rispettivamente, $(i+k)$ sia pari o dispari.

Per il complemento algebrico di a_{ik} useremo il simbolo A_{ik}. Avremo così che A_{ik} è il prodotto del minore complementare dell'elemento a_{ik} per $(-1)^{i+k}$.

ESEMPIO

Se è $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, si ha $A_{11} = +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = +1$; $A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1$; $A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 11$; ...

13 Determinanti del terzo ordine

DEFINIZIONE DETERMINANTE DI UNA MATRICE DEL TERZO ORDINE

Il **determinante di una matrice del terzo ordine** è la somma dei prodotti degli elementi di una riga o di una colonna *qualsiasi* per i rispettivi complementi algebrici.

La definizione appena data ha significato in quanto, come si potrebbe verificare facilmente, il valore numerico ottenuto è indipendente dalla riga o dalla colonna scelta.

ESEMPIO

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ si ha, sviluppando secondo la terza colonna,

$$|A| = +3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3(-3) - 2(-2+3) + 4 \cdot 2 = -3$$

Se si sviluppa secondo la prima colonna, si ha

$$|A| = +2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(4+2) + 3(-2-3) = -3$$

Si noti che, sviluppando secondo la riga o la colonna con il maggior numero di zeri, i calcoli sono semplificati.

14 Regola di Sarrus

Applicando la definizione formulata nel precedente paragrafo, si ha

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Si può verificare che si ottiene la medesima espressione sviluppando il determinante secondo una riga o una colonna qualsiasi.
La formula precedente può essere facilmente ricordata mediante il seguente schema che costituisce la **regola di Sarrus** (valida *solo* per i determinanti del 3° ordine):

$$\begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & \end{array}$$

A destra della matrice data si riscrivono, di seguito e nell'ordine, la prima e la seconda colonna; si calcola il prodotto degli elementi della diagonale principale della matrice e quello degli elementi delle due diagonali parallele; lo stesso si fa con la diagonale secondaria e le sue parallele, ma prendendo, questa volta, i prodotti con il segno cambiato: la somma algebrica dei sei prodotti fornisce il determinante.

ESEMPIO

Calcolare, con la regola di Sarrus, il determinante della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & - \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 2 & \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 & \\ -2 & 1 & 4 & -2 & 1 & \end{array}$$

Si ottiene

$$|A| = -4 - 4 - 6 + 6 - 1 - 16 = -25$$

15 Determinanti di ordine *n*

Il procedimento seguito per definire un determinante del terzo ordine vale anche per determinanti di ordine superiore; si può infatti dire che *il determinante di una qualsiasi matrice di ordine n è dato dalla somma dei prodotti degli elementi di una linea qualsiasi (riga o colonna) per i rispettivi complementi algebrici.*
Si noti che, in tale definizione, rientra anche il caso del determinante del secondo ordine.
Per ricordare il segno che compete a ciascun complemento algebrico, si può ricorrere alla cosiddetta *regola della scacchiera*.

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

È importante rilevare che, come già osservato nel **PARAGRAFO 13** per i determinanti del terzo ordine, anche nel caso dei determinanti di ordine n la scelta della riga, o colonna, non influenza il risultato.
In particolare, scambiando tra loro le righe con le colonne, il determinante non cambia, cioè $|A_T| = |A|$. È ovvio infatti che sviluppare $|A_T|$, ad esempio, secondo la riga i-esima, equivale a sviluppare $|A|$ secondo la colonna i-esima.

OSSERVAZIONE

Ovviamente, matrici diverse possono avere lo stesso determinante.

ESEMPIO

Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Conviene sviluppare il determinante secondo la prima colonna, che è la linea che contiene il maggior numero di zeri:

$$|A| = -1\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

I due determinanti del terzo ordine si possono calcolare con la regola di Sarrus:

$$|A| = -1(21 + 4 + 20 - 1 - 30 - 56) - 3(4 + 8 + 0 - 0 - 1 - 12) = 45$$

16 Proprietà dei determinanti

I determinanti delle matrici quadrate godono delle seguenti proprietà.

1. **Se tutti gli elementi di una linea sono nulli, il determinante è zero.**
2. **Il determinante della matrice unità, I_n, di qualsiasi ordine, è 1.**
3. **Moltiplicando tutti gli elementi di una linea per uno scalare k, il determinante della matrice viene moltiplicato per k.**
4. **Se in una matrice una riga (o una colonna) è la somma di due matrici riga (o matrici colonna), il suo determinante è la somma dei due determinanti che si ottengono sostituendo a quella riga (o colonna) rispettivamente le due matrici riga (o matrici colonna) di cui è somma.**
5. **Se una matrice ha due linee uguali, o proporzionali, il suo determinante è zero.**

6. **Se si scambiano tra loro due righe (o due colonne) di una matrice, il determinante cambia segno.**
7. **Se agli elementi di una linea si sommano gli elementi di un'altra linea a essa parallela, tutti moltiplicati per uno stesso numero, il determinante non cambia.**
8. **Il determinante del prodotto di due matrici è il prodotto dei loro determinanti (TEOREMA DI BINET).**
9. **Se una linea è combinazione lineare di due o più altre linee a essa parallele, il determinante è nullo.**

OSSERVAZIONE

Precisiamo che una linea si dice *combinazione lineare* di due o più altre linee date, se i suoi elementi si ottengono sommando gli elementi corrispondenti delle linee date, dopo aver moltiplicato gli elementi di ciascuna di tali linee per un numero. Questi numeri si dicono *coefficienti* della combinazione lineare.
Ad esempio, nella seguente matrice quadrata di ordine 3 la terza riga è combinazione lineare della prima e della seconda riga, rispettivamente secondo i coefficienti h e k:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ ha+ka' & hb+kb' & hc+kc' \end{bmatrix}$$

Per motivi di spazio non daremo tutte le dimostrazioni delle proprietà enunciate, in quanto alcune di esse sono molto laboriose. Proponiamo a titolo di esempio la dimostrazione della PROPRIETÀ 4, lasciando la dimostrazione di alcune delle altre come esercizio.

Dimostrazione

Supponiamo che sia la prima riga a essere la somma di due matrici riga; sviluppiamo allora secondo la prima riga:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}+b_{11})A_{11} + (a_{12}+b_{12})A_{12} + \dots + (a_{1n}+b_{1n})A_{1n} =$$

$$= a_{11}A_{11} + b_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + b_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} + b_{1n}A_{1n} =$$

$$= (a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}) + (b_{11}A_{11} + b_{12}A_{12} + \dots + b_{1n}A_{1n}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

c.v.d.

17 Calcolo dei determinanti

Il calcolo di un qualunque determinante può essere notevolmente semplificato ricorrendo alla PROPRIETÀ 7. Infatti, applicandola ripetutamente, possiamo rendere nulli tutti gli elementi di una linea tranne uno. Il determinante così ottenuto può essere facilmente sviluppato secondo questa linea. In questo modo, il problema del calcolo di un determinante di ordine n viene ridotto al calcolo di un determinante di ordine $n-1$, a cui si può applicare ancora il procedimento descritto fino a giungere al calcolo di determinanti di ordine 2 o 3.

ESEMPI

1 Calcoliamo il seguente determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 9 \\ -1 & 6 & -5 & -3 \end{vmatrix}$$

In questo caso notiamo che la quarta colonna è uguale alla prima moltiplicata per 3. Dunque, per la **PROPRIETÀ 5**, è

$$|A| = 0$$

OSSERVA CHE

il determinante è nullo se

- tutti gli elementi di una linea sono nulli;
- due linee parallele sono proporzionali;
- una linea è combinazione lineare di altre due o più ad essa parallele.

2 Calcolare il seguente determinante del quarto ordine:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Applicando la **PROPRIETÀ 7**, addizioniamo agli elementi della prima riga quelli della terza moltiplicati per (-1), cioè sostituiamo alla prima riga la differenza tra la prima e la terza: il determinante non cambia; sommiamo poi agli elementi della terza colonna quelli della quarta moltiplicati per 2:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

Come si vede, si è fatto in modo di avere gli elementi della prima riga tutti nulli tranne l'ultimo; sviluppando ora il determinante, in base alla definizione, secondo la prima riga, si ottiene un determinante di ordine 3.
A esso possiamo ancora applicare la **PROPRIETÀ 7**, sommando alla prima riga la terza, il che equivale a sostituire alla prima riga la somma della prima e della terza:

$$|A| = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

Sviluppiamo il determinante così ottenuto secondo la prima riga:

$$|A| = -1 \cdot 12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -12(1+4) = -60$$

Inversa di una matrice

18 Definizioni

DEFINIZIONE **MATRICE INVERSA**

Si chiama **matrice inversa** di una matrice quadrata A di ordine n, e si indica con il simbolo A^{-1}, una matrice (se esiste), anch'essa quadrata e dello stesso ordine, tale che

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Enunciamo il seguente teorema.

TEOREMA

L'inversa di una matrice quadrata, se esiste, è unica.

Non tutte le matrici quadrate hanno un'inversa. Se di una matrice quadrata A esiste un'inversa, A si dice **invertibile** o **non singolare**. Se tale inversa non esiste, A si dice **non invertibile** o **singolare**. Le matrici con determinante nullo non sono invertibili.

Infatti, se A è invertibile, allora

$$A \cdot A^{-1} = I$$

Per la **PROPRIETÀ 2** dei determinanti (**PARAGRAFO 16**), è $|I| = 1$, e quindi

$$|A \cdot A^{-1}| = 1$$

Ma per la **PROPRIETÀ 8** (**TEOREMA DI BINET**), si ha

$$|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|$$

e perciò

$$|A| \cdot |A^{-1}| = 1$$

da cui

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Le ultime due uguaglianze sono assurde se è $|A| = 0$. Possiamo perciò concludere che **condizione necessaria affinché una matrice sia invertibile è che il suo determinante sia diverso da zero.** Inoltre, se una matrice è invertibile, *il determinante della sua inversa è il reciproco del suo determinante*. Nel **PARAGRAFO 19** vedremo che la condizione che il determinante sia diverso da zero è, oltre che necessaria, anche sufficiente per l'invertibilità di una matrice.

19 Calcolo dell'inversa di una matrice

Il seguente teorema, che ci limitiamo a enunciare, fornisce un metodo per determinare l'inversa di una data matrice.

TEOREMA

Sia A una matrice quadrata il cui determinante sia diverso da zero; sia A^* la matrice formata con i complementi algebrici degli elementi di A. La matrice inversa di A esiste ed è la trasposta di A^* divisa per il determinante di A. Si ha

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A_T^* \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{bmatrix}$$

OSSERVAZIONE

Questo teorema, insieme a quanto osservato nel **PARAGRAFO 18**, ci permette di affermare che **condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice quadrata sia invertibile è che il suo determinante sia diverso da zero**.

In pratica, per determinare l'inversa di una matrice, dobbiamo:

1. calcolare il determinante di A (se $|A| = 0$ l'inversa non esiste);
2. costruire la matrice A^* dei complementi algebrici di A;

3. formare la trasposta A_T^* di tale matrice;
4. dividere ciascun elemento della matrice così ottenuta per il determinante di A.

ESEMPIO

Determinare l'inversa della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Calcoliamo $|A|$, applicando la regola di Sarrus:

$$|A| = 6 + 2 + 0 - 0 - 1 + 4 = 11$$

2. Costruiamo la matrice dei complementi algebrici:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -4 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

3. Formiamone la trasposta:

$$A_T^* = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

5. Dividiamone ciascun elemento per $|A| = 11$:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{11} & -\frac{4}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \\ -\frac{4}{11} & \frac{1}{11} & \frac{5}{11} \end{bmatrix}$$

Ti lasciamo il compito di verificare che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_3$.

Rango di una matrice

20 Minori

Sia A una matrice di tipo $(m,\ n)$. Possiamo estrarre da essa una **sottomatrice**, scegliendo p righe e q colonne di A $(0 < p \leq m,\ 0 < q \leq n)$ e considerando la matrice formata dagli elementi che appartengono contemporaneamente alle righe e alle colonne prescelte.

DEFINIZIONE MINORE D'ORDINE p

Si dice **minore d'ordine** p della matrice A il determinante di una sottomatrice quadrata di tipo $(p,\ p)$ estratta da A.

Evidentemente, l'ordine di un minore estratto da una matrice di tipo $(m,\ n)$ non può superare il più piccolo dei due numeri m, n. Si noti che un qualsiasi elemento della matrice può essere considerato un suo minore di ordine 1 e che, in generale, una stessa matrice ammette diversi minori dello stesso ordine.

ESEMPIO

Consideriamo la seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

I seguenti sono minori d'ordine 1: $|1| = 1, \ |0| = 0, \ |-2| = -2,$ ecc.
Scegliendo gli elementi della prima e seconda riga e della seconda e quarta colonna, si ha il seguente minore di ordine 2:

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 3$$

Infine un minore di ordine 3 è, ad esempio,

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

La matrice A ovviamente non ha minori di ordine superiore a 3.

21 Rango

DEFINIZIONE **RANGO DI UNA MATRICE**

Si dice **rango** o **caratteristica** di una matrice A il massimo ordine dei minori non nulli che si possono estrarre da A.

Se gli elementi di A sono tutti nulli, risulta nullo qualsiasi minore estratto da A. Si conviene in tal caso che il rango di A sia zero.

Se A è una matrice di tipo $(m, \ n)$, il suo rango, evidentemente, non può superare il più piccolo dei due numeri m e n.

ESEMPI

1 Consideriamo la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

Essa ha rango 1. Infatti essa ha minori non nulli di ordine 1: ad esempio $|1| = 1$. D'altra parte, la prima e la seconda riga di A, e così pure la seconda e la terza, sono proporzionali e quindi qualunque minore di ordine 2 o 3 di A, avendo due righe proporzionali, risulta nullo (**PROPRIETÀ 5** del **PARAGRAFO 16**).

2 Consideriamo la matrice $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Essa ha rango 2. Infatti essa ha un minore non nullo di ordine 2: $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$; d'altra parte l'unico minore di ordine 3 di B è $|B|$ e risulta $|B| = 0$, essendo la terza riga di B uguale alla somma delle prime due (**PROPRIETÀ 9** del **PARAGRAFO 16**).

Si osservi che dire che una matrice A di tipo $(m, \ n)$ ha rango r equivale ad affermare che

1. esiste un minore di A, di ordine r, diverso da zero;
2. tutti i minori di A di ordine maggiore di r sono nulli.

Queste considerazioni suggeriscono anche un metodo per determinare il rango di una data matrice: individuato un minore di ordine r non nullo, si calcolano tutti i minori di ordine maggiore di r (in particolare se $r = \min(m, n)$, non esistendo minori di ordine superiore, il rango è r).
Se questi risultano tutti nulli, il rango della matrice è r; in caso contrario si sarà individuato un minore non nullo di ordine maggiore di r e si dovrà quindi riprendere il procedimento descritto. In pratica però tale metodo è molto laborioso.
Il teorema di Kronecker, che enunceremo nel paragrafo seguente, permette di determinare il rango di una matrice in modo più rapido.
Osserviamo infine che, se A è una matrice quadrata di ordine n, il suo rango è n se e solo se è $|A| \neq 0$; ovviamente il suo rango non può essere maggiore di n.

22 Teorema di Kronecker

DEFINIZIONE **MATRICE ORLATA**

Orlare una matrice di tipo (m, n) significa aggiungerle successivamente una riga e una colonna, in modo da trasformarla in una matrice di tipo $(m+1, n+1)$. La matrice così ottenuta conterrà dunque la matrice data come sottomatrice.

TEOREMA **TEOREMA DI KRONECKER**

Il rango di una matrice A è r se e solo se:

1. esiste un minore A' non nullo di A, di ordine r;
2. sono nulli tutti i minori di ordine $r+1$, ottenuti orlando in ogni modo possibile il minore A' con righe e colonne di A.

ESEMPI

1 Determinare il rango della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Osserviamo che l'elemento della prima riga e della prima colonna costituisce un minore di ordine 1 non nullo:

$$|1| = 1 \neq 0$$

Tale minore verifica la condizione **1** del teorema. Per controllare la validità della condizione **2**, cominciamo orlandolo con la 2ª riga e la 2ª colonna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Orliamolo ora con la 2ª riga e la 3ª colonna:

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

La condizione **2** non è perciò soddisfatta. Abbiamo però determinato un minore di ordine 2 non nullo, formato con gli elementi della 1ª e 2ª riga e della 1ª e 3ª colonna. Per quest'ultimo minore la condizione **1** del teorema è soddisfatta.

Per controllare la validità della condizione **2** dovremo calcolare 6 minori di ordine 3, e precisamente 3 formati orlando il minore considerato con la terza riga e, rispettivamente, con la 2ª, 4ª e 5ª colonna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 1 & \dots & \dots \\ 2 & 4 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 1 & \dots \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 2 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & \dots & 2 \\ 2 & \dots & 1 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

e altri 3 formati orlando il minore dato con la 4ª riga e, ancora, con la 2ª, 4ª e 5ª colonna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 6 & 2 & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 1 & \dots \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & \dots & 2 & 1 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & \dots & 2 & \dots & 5 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

I primi tre minori di ordine 3 hanno la terza riga che è somma delle prime due; negli altri tre la terza riga è somma della prima e del doppio della seconda. Quindi, poiché tutti i sei minori di ordine 3 così ottenuti sono nulli, è verificata anche la condizione **2** del teorema. La matrice A ha perciò rango 2.

NOTA BENE

Una sottomatrice si può orlare anche aggiungendo all'interno della sottomatrice stessa righe e colonne della matrice da cui è stata estratta. È fondamentale però inserire tali righe e colonne nei rispettivi posti in modo che la matrice orlata mantenga l'ordinamento della matrice di partenza.

Esercizi

- Nozioni fondamentali
- Algebra delle matrici
- Determinanti di matrici quadrate
- Inversa di una matrice quadrata
- Rango di una matrice

Nozioni fondamentali

RICORDIAMO LA TEORIA

- **Matrice di tipo (m, n)**: tabella formata da $m \cdot n$ elementi di $\mathbb{R}$ posti su m righe e n colonne. Si scrive $A = [a_{ik}] \quad i = 1, 2, ..., m \quad k = 1, 2, ..., n$.
  Se $m = 1$ parliamo di **matrice riga**, se $n = 1$ di **matrice colonna**.
  Se $m = n$ la **matrice** è **quadrata di ordine n**.
- **Matrice nulla**: tutti i suoi elementi sono 0.
- **Matrici uguali**: matrici che hanno tutti gli elementi corrispondenti uguali
  $$A = B \iff a_{ik} = b_{ik} \quad i = 1, ..., m \quad k = 1, ..., n$$
- **Matrice opposta di una matrice A**: matrice indicata con $-A$, i cui elementi sono gli opposti dei corrispondenti elementi di A.
- **Matrice trasposta della matrice A**: matrice indicata con A_T, che si ottiene da A scambiando le righe con le colonne.
- **Diagonale principale di una matrice quadrata**: insieme degli elementi che hanno i due indici uguali.
- **Diagonale secondaria di una matrice quadrata di ordine n**: insieme degli elementi i cui indici hanno per somma $n + 1$.
- **Matrice diagonale**: matrice quadrata i cui elementi al di fuori della diagonale principale sono nulli.
- **Matrice triangolare superiore (inferiore)**: matrice quadrata i cui elementi al di sotto (sopra) della diagonale principale sono nulli.
- **Matrice unità di ordine n**: matrice diagonale, indicata con I_n, i cui elementi sulla diagonale principale sono tutti uguali a 1.

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

È data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

1 Qual è l'elemento a_{32}?

a 3 **b** 4 **c** 5 **d** -2

2 Qual è l'elemento a_{13}?

a 2 **b** -3 **c** 0 **d** 3

3 Quali sono gli elementi della diagonale principale?

a $1; -1; -3$ **b** $0; -1; 2$ **c** $1; -2; 0$

COMPLETARE...

4 L'opposta di una matrice è quella matrice dello stesso tipo i cui elementi sono .... dei corrispondenti elementi della matrice data.

5 Una matrice si dice triangolare superiore se sono nulli tutti gli elementi ....

6 La matrice identica è una matrice .... di ordine n formata da n .... disposti sulla diagonale principale e n^2 − .... negli altri posti.

ESERCIZIO SVOLTO

7 Determina per quali valori di x, y, z la matrice $\begin{bmatrix} x+y & x-y-2 & 0 \\ 0 & x-y & y+z \\ x+3z & 0 & 2z \end{bmatrix}$ risulta diagonale.

Come sappiamo una matrice è diagonale quando gli elementi non appartenenti alla diagonale principale sono tutti nulli. Dovrà quindi essere:

$$\begin{cases} x-y-2=0 \\ y+z=0 \\ x+3z=0 \end{cases} \quad \text{da cui risolvendo si ottiene} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases}$$

Sostituendo nella matrice data i valori trovati, otteniamo $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ che è evidentemente una matrice diagonale.

8 Determina x e y in modo che siano uguali le due matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ y^2 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 2y-1 \\ x & 5 \end{bmatrix}$$

$\left[x = 1 \wedge y = 1,\ A = B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\right]$

9 Determina x, y, z in modo che siano opposte le due matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1+x & 0 \\ z-2y & 3z-x \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -y-z & 0 \\ 4x+y & y+x \end{bmatrix}$$

$\left[x = 1 \ \wedge\ y = 3 \ \wedge\ z = -1, \quad A = -B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}\right]$

10 Determina x e y in modo che siano uguali le due matrici

$$\begin{bmatrix} 1 & x^2+y & -3 \\ -2 & 5 & y-x \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & x-y^2 & -3 \\ -2 & 5 & x+y \end{bmatrix}$$

$\left[\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}\right]$

11 Determina x e y in modo che siano opposte le matrici

$$\begin{bmatrix} x+y-1 & 3 \\ -4 & 2 \\ 0 & x^2+y^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x-y+1 & -3 \\ 4 & -2 \\ 0 & -x^2+y^2 \end{bmatrix}$$

$\left[\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}\right]$

12 Determina x, y e z in modo che la seguente matrice sia triangolare superiore.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & x & 3-y \\ x+z & 0 & 2 & -5 \\ 0 & x+2y-1 & -3 & z^2 \\ 0 & 2y-3z & 0 & y \end{bmatrix}$$

$\left[x = -\frac{1}{2} \wedge y = \frac{3}{4} \wedge z = \frac{1}{2}\right]$

13 Determina x e y in modo che sia diagonale la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}x-3y & 0 \\ 3y-\frac{1}{2}x & x & 4y^2-x^2+2 \\ 0 & x^2-4y^2-2 & y \end{bmatrix}$$

$\left[\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{4} \end{cases}\right]$

14 Date le due matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2x+y \\ 3 & -2 \\ x+2y & 0 \\ -1 & 5-2z \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3-z & -1 \\ 4-z & -2 & 0 & x+y \end{bmatrix}$$

determina x, y, z in modo che $A_T = B$. $[x = 1 \wedge y = 0 \wedge z = 2]$

15 Esistono valori di a per i quali le due matrici $A = \begin{bmatrix} 2a+1 & 1 \\ 3a+2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ a+7 & 3 \end{bmatrix}$ risultano uguali? [no]

Algebra delle matrici

RICORDIAMO LA TEORIA

- **Somma** di due matrici A stesso tipo: matrice, indicata con $A + B$, i cui elementi sono la somma dei corrispondenti elementi delle matrici date.
- **Prodotto di una matrice A per uno scalare α**: matrice i cui elementi sono il prodotto di α per i corrispondenti elementi di A.
- **Prodotto scalare** di una matrice riga A di tipo $(1, s)$ per una matrice colonna B di tipo $(s, 1)$: matrice di tipo $(1, 1)$ che ha per elemento il numero che si ottiene sommando i prodotti del tipo $a_{1j}\, b_{j1}$ con $j = 1, \ldots, s$.
- **Prodotto righe per colonne** della matrice A di tipo (m, s) per la matrice B di tipo (s, n): matrice di tipo (m, n) il cui elemento generico è dato da $p_{ik} = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\, b_{jk} \quad i = 1, \ldots, m \quad k = 1, \ldots, n$.
- **Proprietà delle operazioni tra matrici**

Date le matrici A, B, C e gli scalari α, β, $\forall A, B, C$ e $\forall \alpha, \beta$, si ha:

1. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
2. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
4. $1 \cdot A = A$; $\quad (-1)A = -A$
5. $A + B = B + A$
6. $A + (B + C) = (A + B) + C$; $\quad A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
7. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$; $\quad (B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$

VERO O FALSO?

16 Il prodotto di due matrici può essere una matrice nulla se e solo se una delle due matrici è una matrice nulla. V F

17 La somma di due matrici si può eseguire solo se le due matrici sono dello stesso tipo. V F

18 Il prodotto di due matrici si può eseguire solo se le due matrici sono dello stesso tipo. V F

19 L'addizione di matrici gode delle proprietà associativa e commutativa. V F

20 La moltiplicazione di matrici gode delle proprietà associativa e commutativa. V F

21 Il prodotto righe per colonne di due matrici è possibile solo se la prima matrice ha un numero di righe uguale al numero di colonne della seconda. V F

22 La moltiplicazione tra matrici diagonali è un'operazione commutativa. V F

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

23 Il prodotto $[2 \quad 0 \quad -1] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ è

a $[1]$ **b** $[-1]$ **c** $[2]$ **d** $[-2]$

24 Il prodotto delle matrici $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ è la matrice

a $\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ **b** $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ **c** $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ **d** $\begin{bmatrix} -6 & 5 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

COMPLETARE...

25 La differenza di due matrici è la somma della prima matrice con ....

26 La proprietà distributiva del prodotto di uno scalare per una matrice rispetto alla somma di matrici è espressa dalla seguente uguaglianza: $\alpha(A+B) =$.................... .

Siano *A*, *B*, *C* le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcola le seguenti espressioni

ESERCIZIO SVOLTO

27 $5A - 3B$.

Ricordando la definizione di prodotto di una matrice per uno scalare e di differenza tra matrici possiamo scrivere:

$$5\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 & -5 \\ 15 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ -6 & -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 4 \\ 21 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

28 $A+B;\quad A-B.$ $\left[\begin{bmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right]$

29 $A+B+C;\quad A-B+C.$ $\left[\begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}\right]$

30 $2A+B;\quad 3A-2B+C.$ $\left[\begin{bmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 13 & 5 & 0 \end{bmatrix}\right]$

31 Determina una matrice X tale che

$$2(A+B) = X + C$$

$\left[X = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -9 \\ 2 & -5 & 5 \end{bmatrix}\right]$

32 Determina una matrice X tale che

$$2(A+X) = C - B - A$$

$\left[X = \begin{bmatrix} -3 & -3 & \frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2} & 2 & -2 \end{bmatrix}\right]$

33 Calcola $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]$

34 Calcola $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta & -\text{sen}\,\beta \\ \text{sen}\,\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\text{sen}(\alpha+\beta) \\ \text{sen}(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}\right]$

35 Determina x in modo che sia $\begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ $[x = 2]$

36 Determina x e y in modo che sia $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & x \\ y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $[x = 3 \wedge y = 1]$

37 Sia $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$. Calcola A^2 e A^3. $\left[\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}\right]$

38 Verifica che $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

39 Determina x in modo che $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ x & -6 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $[x = -9]$

Considera le seguenti matrici:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

40 Calcola $A \cdot B$; $B \cdot A$. $\left[\begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}\right]$

41 Calcola A^2; $B^2 - A \cdot B$. $\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & -15 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\right]$

42 Calcola $\frac{1}{2}A \cdot C - 3B \cdot C$. $\left[\begin{bmatrix} -\frac{43}{2} & -\frac{35}{2} \\ -\frac{41}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}\right]$

43 Calcola $A \cdot B \cdot C$; $C \cdot B \cdot A$. $\left[\begin{bmatrix} 14 & -8 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -10 & 32 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right]$

44 Determina una matrice X tale che sia $A \cdot X = B$. $\left[\begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right]$

45 Calcola $A \cdot (B + C)$, $A \cdot B + A \cdot C$ e verifica che i risultati sono uguali.

46 Calcola $(B + C) \cdot A$, $B \cdot A + C \cdot A$ e verifica che i risultati sono uguali.

Considera le matrici $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

47 Calcola $A \cdot B$, $B \cdot A$ e verifica che $A \cdot B \neq B \cdot A$.

48 Verifica che $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

49 Verifica che $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

50 Verifica che $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

51 Verifica che $(A \cdot B)_T \neq A_T \cdot B_T$, mentre $(A \cdot B)_T = B_T \cdot A_T$.

52 Calcola A^2, B^2, C^2.

---

53 Calcola $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\right]$

54 Calcola $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ $[\begin{bmatrix} 1 & 8 & -1 \end{bmatrix}]$

55 Calcola $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}\right]$

56 Calcola $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} 1 & 2 & 12 \\ 4 & 1 & 13 \\ -1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}\right]$

57 Calcola $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right]$

58 Calcola $\begin{bmatrix} \log x & \log y & -\log z \\ \log x & -\log y & \log z \\ -\log x & \log y & \log z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{matrix} \log(xyz) & \log\frac{x}{yz} & \log\frac{y}{xz} \\ \log\frac{x}{yz} & \log(xyz) & \log\frac{z}{xy} \\ \log\frac{y}{xz} & \log\frac{z}{xy} & \log(xyz) \end{matrix}\right]$

59 Calcola

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & \cos\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \operatorname{sen} 2\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen} 2\alpha & \cos 2\alpha & \cos\alpha \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right]$$

ESERCIZIO SVOLTO

60 Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & \tan\alpha \\ -\tan\alpha & 1 \end{bmatrix}$; calcola $A^2 = A \cdot A$.

Eseguendo il solito prodotto righe per colonne otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & \tan\alpha \\ -\tan\alpha & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \tan\alpha \\ -\tan\alpha & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\tan^2\alpha & 2\tan\alpha \\ -2\tan\alpha & -\tan^2\alpha+1 \end{bmatrix}$$

Notando che è $1-\tan^2\alpha = 1 - \dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$

possiamo scrivere $A^2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha} & 2\tan\alpha \\ -2\tan\alpha & \dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha} \end{bmatrix}$

61 Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; calcola $A^2 = A \cdot A$ e $A^3 = A \cdot A^2$. $\left[\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}\right]$

ATTENZIONE!

$A^n = A \cdot A^{n-1}\ \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Ricorda però che il prodotto di matrici non è commutativo.

62 $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$; calcola $A^2 = A \cdot A$ e $A^3 = A \cdot A^2$. $\left[\begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \operatorname{sen} 2\alpha \\ -\operatorname{sen} 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \cos 3\alpha & \operatorname{sen} 3\alpha \\ -\operatorname{sen} 3\alpha & \cos 3\alpha \end{bmatrix}\right]$

63 Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix}$; calcola A^2 e A^3. $\left[(1+x^2)\begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix}; (1+x^2)^2\begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix}\right]$

64 Date le matrici $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, verifica che è

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2$$

65 Determina x in modo che risulti $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -2 \\ 14 & 3 \end{bmatrix}$ $[x = 5]$

66 Determina x e y in modo che risulti

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & x+y & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & x \\ 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \qquad [x = -11 \land y = 22]$$

COMPLETARE...

67 Siano A una matrice di tipo $(m,\ n)$ e B una matrice di tipo $(n,\ p)$. Dimostra che $(AB)_T = B_T A_T$, ossia **la trasposta del prodotto di due matrici è il prodotto, in ordine inverso, delle loro trasposte**.
Cominciamo con l'osservare che la matrice AB, essendo il prodotto di una matrice di tipo $(m,\ n)$ con una di tipo $(n,\ p)$, è una matrice di tipo $(m,\ p)$ e quindi la sua trasposta $(AB)_T$ è di tipo ....; d'altra parte le matrici B_T e A_T sono rispettivamente di tipo .... e .... e quindi il loro prodotto $B_T A_T$ è di tipo .... Dunque le matrici $(AB)_T$ e $B_T A_T$ sono dello stesso tipo.
Poniamo $AB = C$ e $B_T A_T = D$. Occorre dimostrare che $C_T = D$, ossia che $c_{ki} = d_{ik}$.
L'elemento c_{ki} è il prodotto scalare della riga k della matrice A con la colonna i della matrice B, ossia

$$c_{ki} = [a_{k1} \quad a_{k2} \quad \dots \quad a_{kn}] \cdot \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \dots \\ b_{ni} \end{bmatrix} = a_{k1}b_{1i} + a_{k2}b_{2i} + \dots + a_{kn}b_{ni}$$

D'altra parte d_{ik} è il prodotto scalare della riga i della matrice B_T, ossia della .... della matrice B, con la colonna .... della matrice A_T, ossia .... della matrice A, quindi si ha:

$$d_{ik} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Si può dunque concludere che .... c.v.d.

Determinanti di matrici quadrate

RICORDIAMO LA TEORIA

- **Determinante** di una matrice quadrata A: si indica con $|A|$ e
  - se A è di ordine 1, $|A| = a_{11}$
  - se A è di ordine 2, $|A| = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$.
- **Minore complementare** di un elemento di una matrice quadrata: determinante della matrice che si ottiene sopprimendo dalla matrice data la riga e la colonna alle quali l'elemento appartiene.
- **Complemento algebrico** A_{ik} dell'elemento a_{ik}: minore complementare di a_{ik}, moltiplicato per $(-1)^{i+k}$.
- **Determinante** di una matrice di ordine n: somma dei prodotti degli elementi di una linea qualsiasi per i rispettivi complementi algebrici

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,A_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\,A_{ik}$$

- **Proprietà dei determinanti**:

A Il determinante è nullo se:
- tutti gli elementi di una linea sono nulli;
- due linee parallele sono proporzionali;
- una linea è combinazione lineare di altre due, o più, ad essa parallele.

B Il determinante della matrice unità di qualsiasi ordine è 1.

C Moltiplicando tutti gli elementi di una linea per uno scalare k, il determinante della matrice viene moltiplicato per k.

D Se in una matrice una riga (o una colonna) è la somma di due matrici riga (o matrici colonna), il suo determinante è la somma dei due determinanti che si ottengono sostituendo a quella riga (o colonna) rispettivamente le due matrici riga (o matrici colonna) di cui è somma.

E Se si scambiano tra loro due righe (o due colonne) di una matrice, il determinante cambia segno.

F Se agli elementi di una linea si sommano gli elementi di un'altra linea ad essa parallela, tutti moltiplicati per uno stesso numero, il determinante non cambia.

G Il determinante del prodotto di due matrici è il prodotto dei loro determinanti (**teorema di Binet**).

VERO O FALSO?

68 Per calcolare il determinante di una matrice si può sempre ricorrere alla regola di Sarrus. V F

69 Il determinante si definisce solo per le matrici quadrate. V F

70 Il determinante della somma di due matrici è la somma dei loro determinanti. V F

71 Il determinante del prodotto di due matrici è il prodotto dei loro determinanti. V F

72 Il determinante di una matrice è zero se e soltanto se la matrice è nulla. V F

73 Il determinante di una matrice è 1 se e solo se si tratta di una matrice unità. V F

74 Il determinante del prodotto di una matrice A per uno scalare k è il prodotto del determinante di A per k. V F

75 Una matrice diagonale e una triangolare superiore (o inferiore), aventi gli elementi della diagonale principale uguali, hanno lo stesso determinante. V F

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

76 Qual è il determinante della matrice $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$?

a -10 **b** -24 **c** 10 **d** 14 **e** -14

77 In quali dei seguenti casi il determinante di una matrice è sicuramente zero?

a Se una riga ha tutti gli elementi nulli

b Se una riga ha tutti gli elementi uguali tra loro

c Se due colonne sono uguali

d Se la matrice è triangolare

e Se gli elementi di una riga sono uguali ai corrispondenti elementi di una colonna

f Se gli elementi di una colonna sono tutti multipli di uno stesso intero k

g Se gli elementi della diagonale principale sono tutti nulli

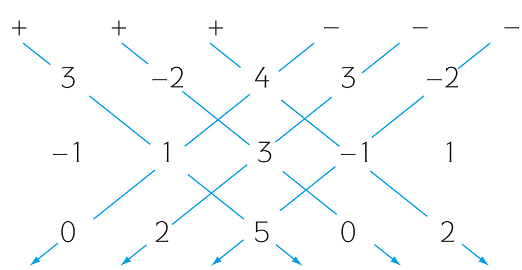
h Se due colonne sono proporzionali

ESERCIZI SVOLTI

78 Calcola il seguente determinante $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

Utilizzando la regola di Sarrus, otteniamo

$15 + 0 + (-8) - 0 - 18 - 10 = -21$



79 Calcola $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 9 & 1 \\ -6 & 3 & 9 & -3 \\ 6 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

Osservando che la terza riga è uguale alla prima moltiplicata per lo scalare -3, possiamo immediatamente concludere che il determinante della matrice è nullo.

Applicando le definizioni, calcola il valore dei seguenti determinanti.

80 $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ $[-11;\ 5]$

81 $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ $[1;\ \cos 2\alpha]$

82 $\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{vmatrix}$ $[x-y;\ 0]$

83 $\begin{vmatrix} x+y & x-y \\ x-y & x+y \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} x & x-1 \\ x-2 & x-3 \end{vmatrix}$ $[4xy;\ -2]$

84 $\begin{vmatrix} x & x-a \\ x-2a & x-3a \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta \end{vmatrix}$ $[-2a^2;\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$

85 $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}2\alpha \\ \cos\alpha & \cos 2\alpha \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}2\alpha \\ \operatorname{sen}2\alpha & \operatorname{sen}3\alpha \end{vmatrix}$ $[-\operatorname{sen}\alpha;\ -\operatorname{sen}^2\alpha]$

86 $\begin{vmatrix} 34 & 55 & 89 \\ 144 & 233 & 377 \\ 610 & 987 & 1597 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ -5 & 8 & 2 \end{vmatrix}$ $[0;\ -181]$

87 $\begin{vmatrix} 25 & 10 & 5 \\ 11 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$ $[-60;\ 0]$

88 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 13 & 21 \\ 34 & 55 & 89 & 144 \\ 233 & 377 & 610 & 987 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $[0;\ x-w]$

89 $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{vmatrix}$ $[(ac-1)(bd-1);\ \operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha]$

Applicando la regola di Sarrus, calcola i seguenti determinanti.

90 $\begin{vmatrix} -5 & 7 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 15 & 35 & 55 \\ 5 & 25 & 45 \\ -15 & 5 & 25 \end{vmatrix}$ $[27;\ 0]$

91 $\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 30 & 40 & 50 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ $\left[-\frac{2}{3};\ (x-3)(x-4)\right]$

92 $\begin{vmatrix} 1 & a & 2a \\ 1 & b & 2b \\ 1 & c & 2c \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & a \\ 1 & ab & ab \end{vmatrix}$ $[0;\ (a-b)(a+b-2ab)]$

Applicando le proprietà studiate, calcola i seguenti determinanti.

93 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & 6 & 3 \\ 8 & 8 & 10 & -1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}$ [0, infatti...; -18]

94 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 7 & 8 & -2 \\ 2 & -4 & -5 & 3 & 1 \\ 4 & -8 & 2 & -1 & 1 \\ -5 & 10 & 7 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ [0, infatti...]

95 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 2a & 2b & 2c & 2d \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ $[0,\ \text{infatti...};\ -60]$

96 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 75 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \end{vmatrix}$ $[(a-1)(b-1)(b-a);\ 0]$

97 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & x+y \\ x & y & z \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $[0;\ 5]$

98 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $[6;\ 7]$

99 $\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ d & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}.$ $[1-abcd;\ (x-1)^3(x+3)]$

100 $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & y \\ 1 & x & y & 1 \\ 1 & y & x & 1 \\ y & 1 & 1 & x \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & e \end{vmatrix}$ $[(x-y)^2(x+y+2)(x+y-2);\ 1+abcde]$

Risolvi le seguenti equazioni.

ESERCIZIO SVOLTO

101 $\begin{vmatrix} -x & 2x \\ 3-x & x+1 \end{vmatrix} = 0$

Per definizione di determinante abbiamo

$$-x(x+1) - 2x(3-x) = -x^2 - x - 6x + 2x^2 = x^2 - 7x = x(x-7)$$

da cui possiamo ricavare, per la legge di annullamento del prodotto, $x = 0 \vee x = 7$.

102 $\begin{vmatrix} x & 2x \\ 3x & 4 \end{vmatrix} = 0$ $\left[x = 0 \vee x = \frac{2}{3}\right]$

103 $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ $[x = -1]$

104 $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x & x & 1 \\ x & x & x \end{vmatrix} = 0$ $[x = 0\ \vee\ x = 1]$

105 $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ 1 & x & x & x \\ 0 & 2 & x & x \\ 0 & 0 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$ $[x = 0\ \vee\ x = 1\ \vee\ x = 2\ \vee\ x = 3]$

Risolvi le seguenti disequazioni.

106 $\begin{vmatrix} x & x & 1 \\ 1 & x & x \\ x & 1 & x \end{vmatrix} \geq 0$ $\left[x \geq -\frac{1}{2}\right]$

107 $\begin{vmatrix} x & x & 1 & 1 \\ 1 & x & x & 1 \\ 1 & 1 & x & x \\ x & 1 & 1 & x \end{vmatrix} < 0$ [impossibile]

108 $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ x & x & 1 \\ x & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{vmatrix} < 0$ $[x < 1 \ \vee \ x > 2]$

Inversa di una matrice quadrata

RICORDIAMO LA TEORIA

- **Matrice inversa** di una matrice quadrata A: matrice, indicata con A^{-1}, dello stesso ordine di A, tale che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

$$\text{Se } |A| \neq 0, \text{ si ha } A^{-1} = \frac{1}{|A|} A_T^* = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{bmatrix}$$

essendo A_T^* la trasposta della matrice A^* formata dai complementi algebrici degli elementi di A.

QUESITI

109 Qual è l'inversa della matrice unità I_7?

110 Qual è l'inversa della matrice $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$?

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

111 L'inversa della matrice $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$ è

a $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ **b** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ **c** $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ **d** $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

112 La matrice A ha determinante 2. Qual è il determinante della sua inversa?

a -2 **b** $\frac{1}{2}$ **c** $-\frac{1}{2}$ **d** 0

e Non esiste la matrice inversa.

113 Moltiplicando una matrice A per la sua inversa, si ottiene

a la matrice A **b** la matrice nulla

c la matrice unità **d** l'inversa di A

114 Qual è l'inversa della matrice unità I_n?

a La stessa matrice I_n

b La matrice nulla

c L'opposta della matrice unità, cioè $(-I_n)$

d Non esiste l'inversa di I_n

115 Una matrice quadrata è invertibile

- **a** se ha il determinante diverso da 1
- **b** se ha il determinante positivo
- **c** se ha il determinante diverso da zero
- **d** sempre

ESERCIZIO SVOLTO

116 Determina l'inversa della matrice $A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

Per prima cosa controlliamo che la matrice sia invertibile, verificando che il suo determinante sia diverso da 0. Utilizzando ad esempio la regola di Sarrus otteniamo

$$|A| = 0 - 12 + 2 + 15 + 4 - 0 = 9 \neq 0$$

Dato che la matrice è invertibile, calcoliamo i complementi algebrici dei suoi elementi.

$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2;$ $\quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -3;$ $\quad A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 17$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2;$ $\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 3;$ $\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -8$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -1;$ $\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3;$ $\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 14$

Formiamo quindi la matrice dei complementi algebrici $A^* = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 17 \\ -2 & 3 & -8 \\ -1 & -3 & 14 \end{bmatrix}$; la sua trasposta sarà $A^*_T = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 17 & -8 & 14 \end{bmatrix}$

Concludendo, l'inversa di A sarà la matrice $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{17}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{14}{9} \end{bmatrix}$

Determina l'inversa delle seguenti matrici, verificando poi, per ognuna di esse, che il prodotto per la corrispondente inversa dà la matrice unità.

117 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad \left[\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{4} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right]$

118 $\begin{bmatrix} 6 & -17 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -8 & -13 \end{bmatrix}$ $\quad \left[\begin{bmatrix} 3 & 17 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -13 & -5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}\right]$

119 $\begin{bmatrix} 13 & -21 \\ -34 & 55 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \left[\begin{bmatrix} 55 & 21 \\ 34 & 13 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{7}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}\right]$

120 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \left[\begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}\right]$

121 $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ $\quad \left[\begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{4}{5} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{10} & -\frac{9}{10} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right]$

122 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \\ 5 & 1 & 6 & 10 \\ 8 & 2 & 1 & 17 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} 4 & 7 & -3 & -2 \\ -24 & -19 & 20 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right]$

123 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & 1 & -2 \\ -4 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\left[\frac{1}{30}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}\right]$

124 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\right]$

125 $\begin{bmatrix} sen\ \alpha & cos\ \alpha & cos\ \alpha \\ -cos\ \alpha & sen\ \alpha & sen\ \alpha \\ sen\ \alpha & -cos\ \alpha & sen\ \alpha \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} sen\ \alpha & -cos\ \alpha & 0 \\ sen\ \alpha & sen\ \alpha\ \dfrac{sen\ \alpha - cos\ \alpha}{sen\ \alpha + cos\ \alpha} & \dfrac{-1}{sen\ \alpha + cos\ \alpha} \\ cos\ \alpha - sen\ \alpha & \dfrac{2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{sen\ \alpha + cos\ \alpha} & \dfrac{1}{sen\ \alpha + cos\ \alpha} \end{bmatrix}\right]$

Per quali valori di α esiste la matrice inversa?

126 $\begin{bmatrix} cos\ \alpha & sen\ \alpha \\ -sen\ \alpha & cos\ \alpha \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} cos\ \alpha & 0 & sen\ \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\ \alpha & 0 & cos\ \alpha \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} cos\ \alpha & -sen\ \alpha \\ sen\ \alpha & cos\ \alpha \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} cos\ \alpha & 0 & -sen\ \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ sen\ \alpha & 0 & cos\ \alpha \end{bmatrix}\right]$

127 $\begin{bmatrix} cos\ \alpha & sen\ \alpha & 0 & 0 \\ -sen\ \alpha & cos\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos\ \beta & sen\ \beta \\ 0 & 0 & -sen\ \beta & cos\ \beta \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} cos\ \alpha & -sen\ \alpha & 0 & 0 \\ sen\ \alpha & cos\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos\ \beta & -sen\ \beta \\ 0 & 0 & sen\ \beta & cos\ \beta \end{bmatrix}\right]$

128 $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$ con $a \cdot b \cdot c \neq 0$ $\left[\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\frac{c}{ab} & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & -\frac{a}{bc} \end{bmatrix}\right]$

129 $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ con $a \neq 0$ $\left[\begin{bmatrix} a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{-1} \end{bmatrix}\right]$

COMPLETARE...

130 Siano A e B due matrici quadrate invertibili. Dimostra che

$$[AB]^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

ossia **l'inversa della matrice prodotto di due matrici è il prodotto, in ordine inverso, delle loro inverse.**
Occorre dimostrare che il prodotto delle matrici $(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1})$ e il prodotto delle matrici $(B^{-1}A^{-1}) \cdot (AB)$ sono la matrice unità.
Si ha infatti, per la proprietà associativa del prodotto tra matrici:

$(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A \cdot (... \cdot ...) \cdot A^{-1} = A \cdot .... \cdot A^{-1} = ...$

$(B^{-1}A^{-1})(A \cdot B) = B^{-1}(... \cdot ...)B = B^{-1} .... B = ...$ c.v.d.

131 Sia A una matrice quadrata invertibile. Dimostra che $[A_T]^{-1} = [A^{-1}]_T$ ossia che **l'inversa della trasposta di una matrice è la trasposta della sua inversa** (occorre dimostrare che si ha $A_T \cdot [A^{-1}]_T = I$ e che $[A^{-1}]_T \cdot A_T = I$).

132 Dimostra che, se A è una matrice quadrata invertibile,

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}$$

133 Considera la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ -x & -2 \end{bmatrix}$

Determina x in modo che $A^{-1} = A$. $[x = \pm\sqrt{3}]$

Rango di una matrice

RICORDIAMO LA TEORIA

- **Minore** d'ordine p della matrice A: determinante di una sottomatrice di ordine (p, p) estratta da A.
- **Rango** di una matrice A: massimo ordine dei minori non nulli di A.
- **Orlare** una matrice di tipo (m, n): significa aggiungerle una riga e una colonna in modo che diventi una matrice di tipo $(m+1, n+1)$.
- **Teorema di Kronecker**: la matrice A ha rango r se e solo se
  - esiste un minore $|A'|$ di ordine r estratto da A;
  - sono tutti nulli i minori di ordine $r+1$ ottenuti orlando A' con righe e colonne di A in tutti i modi possibili.

VERO O FALSO?

134 Il rango si può definire solo per le matrici quadrate. V F

135 Una matrice non nulla non può avere rango zero. V F

136 Se una matrice ha un minore di ordine k non nullo, il suo rango è sicuramente maggiore o uguale a k. V F

137 Il massimo rango di una matrice con 3 righe e 4 colonne è 4. V F

ESERCIZIO SVOLTO

138 Determina il rango della matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & a \end{bmatrix}$

La matrice è quadrata di ordine 2. Il suo rango è 2 se e solo se il suo determinante è diverso da zero. Si ha $|A| = a + 6$ e quindi $|A| = 0 \iff a = -6$. Si hanno quindi due possibilità.

Se è $a \neq -6$, essendo $|A| \neq 0$, il rango di A è 2.

Se è $a = -6$, si ha $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$. Tale matrice, avendo determinante zero, non può avere rango 2; del resto ciascuno dei suoi elementi costituisce un minore non nullo di ordine 1 e quindi il rango di A è 1. Riassumendo, si ha

- se $a \neq -6$ il rango di A è 2;
- se $a = -6$ il rango di A è 1.

Determina il rango delle seguenti matrici mediante semplici considerazioni sui determinanti e sulle loro proprietà.

139 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ [3; 1; 1]

140 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ [2; 3; 2]

141 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 2 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ -5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ [3; 2; 2]

Applicando il teorema di Kronecker, determina il rango delle seguenti matrici.

142 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ [2; 3; 1]

143 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ [3; 2; 2]

144 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 7 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 9 & -4 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -9 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \\ 17 & 18 & 19 & 20 \end{bmatrix}$ [3; 2]

145 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 16 & 32 & 64 & 128 \\ 256 & 512 & 1024 & 2048 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 10 \\ 5 & 9 & 13 \end{bmatrix}$ [1; 2]

146 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 15 \\ -1 & 5 & 0 & -10 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 9 & 7 \\ 2 & 0 & 6 & 14 & 12 \end{bmatrix}$ [3; 2]

Laboratorio di matematica

Eseguire operazioni con le matrici usando il foglio elettronico

Utilizziamo il foglio elettronico per eseguire le operazioni tra matrici quadrate di ordine 2: somma, differenza, prodotto di due matrici; prodotto di una matrice per uno scalare; calcolo del determinante. In questa esercitazione facciamo riferimento a *Excel*, ma lo stesso procedimento può essere impiegato in altri fogli elettronici.

La tabella in **FIGURA 1** è una proposta di soluzione.

	A	B	C	D	E	F	G
1				**Operazioni con le matrici**			
2							
3				**Dati**			
4		**Matrice A**				**Matrice B**	
5		Colonna 1	Colonna 2			Colonna 1	Colonna 2
6	Riga 1	1	-3		Riga 1	-2	4
7	Riga 2	2	1		Riga 2	1	0
8							
9	Scalare k	-3					
10							
11				**Risultati**			
12							
13		**Somma A+B**				**Differenza A-B**	
14		Colonna 1	Colonna 2			Colonna 1	Colonna 2
15	Riga 1	-1	1		Riga 1	3	-7
16	Riga 2	3	1		Riga 2	1	1
17							
18		**Prodotto AB**				**Prodotto kA**	
19		Colonna 1	Colonna 2			Colonna 1	Colonna 2
20	Riga 1	-5	4		Riga 1	-3	9
21	Riga 2	-3	8		Riga 2	-6	-3
22							
23	**Determinante di A**		7		**Determinante di B**		-4

FIGURA 1

Dopo aver scritto le intestazioni come illustrato nella tabella proposta immettiamo gli elementi della prima matrice nelle celle **B6**, **B7**, **C6**, **C7**, mentre nelle celle **F6**, **F7**, **G6**, **G7** immettiamo gli elementi della seconda matrice.
Per ottenere la somma delle due matrici, dopo aver selezionato la cella **B15** scriviamo la formula:

$$= \mathrm{B6} + \mathrm{F6}$$

e la copiamo nelle celle **B16**, **C15**, **C16**.

Per ottenere la differenza delle due matrici, immettiamo nella cella **F15** la formula:

$$= \mathrm{B6} - \mathrm{F6}$$

copiandola quindi nelle celle **F16**, **G15**, **G16**.

Per ottenere il prodotto delle due matrici si può utilizzare l'apposita funzione di *Excel*, che ha la sintassi seguente:

MATR.PRODOTTO(matrice1; matrice2)

Per usare questa funzione occorre selezionare preventivamente tutte le celle che conterranno gli elementi della matrice prodotto.
Selezioniamo quindi le celle **B20**, **B21**, **C20**, **C21** e scriviamo:

=MATR.PRODOTTO(B6:C7;F6:G7)

A questo punto, invece di premere *Invio* come si fa di solito, premiamo *Ctrl+Maiusc+Invio*: in questo modo nelle celle selezionate compaiono gli elementi della matrice prodotto.
Osserviamo che se dopo aver scritto la formula si preme solo *Invio*, *Excel* fornisce soltanto l'elemento appartenente alla prima riga e alla prima colonna (in questo caso -5), e non l'intera matrice.

Per calcolare il determinante delle due matrici utilizziamo la funzione di *Excel* corrispondente; essa ha la sintassi:

MATR.DETERM(matrice)

Digitiamo dunque nella cella **C23** la formula

= MATR.DETERM(B6;C7)

e copiamola nella cella **G23**.

ESERCIZI

1 Utilizza il foglio elettronico per eseguire le operazioni tra matrici quadrate di ordine 3.

2 Utilizza il foglio elettronico per calcolare il determinante di una matrice quadrata di ordine 3.

Eseguire operazioni con le matrici usando *Derive*

Il programma *Derive* consente di eseguire le operazioni tra le matrici studiate in questo capitolo, compreso il calcolo del determinante e dell'inversa di una matrice quadrata, con estrema semplicità.
Inseriamo ad esempio le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \pi & 2 \\ -3 & \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Facciamo clic sul pulsante : appare una finestra (**FIGURA 2**) intitolata "Crea matrice..."; scriviamo nelle apposite caselle il numero di righe e di colonne di cui è composta la matrice che vogliamo definire (oppure impostiamo tali valori mediante i pulsanti con le freccine a destra delle caselle) e quindi clicchiamo su *OK*.

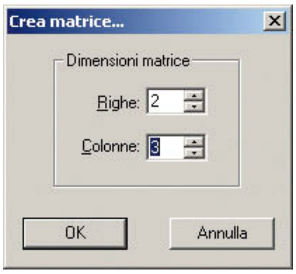


FIGURA 2

Compare una seconda finestra (FIGURA 3) con una tabella già predisposta per l'inserimento degli elementi della matrice: non dobbiamo fare altro che riempirla e cliccare su *OK*.

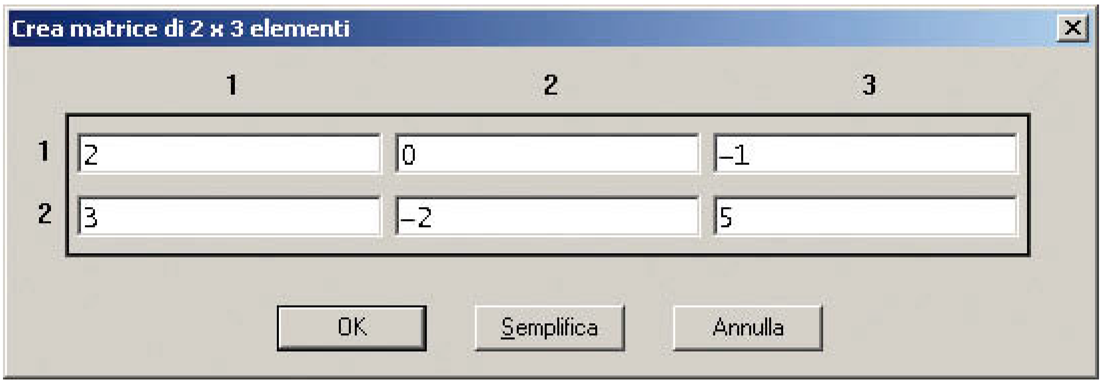


FIGURA 3

La matrice così definita apparirà nella finestra *Derive* (espressione **#1** di FIGURA 4). Ripetiamo poi la procedura descritta per inserire le altre due matrici.

In alternativa al metodo descritto, le matrici si possono introdurre mediante la procedura con cui si inserisce una qualsiasi espressione: occorre tenere presente che per *Derive* una matrice non è altro che un vettore colonna i cui elementi sono vettori riga. Perciò per inserire la matrice A è sufficiente inserire l'espressione

[2,0,–1; 3,–2,5]

Le operazioni tra le matrici si indicano con i comuni simboli aritmetici. Naturalmente *Derive* può eseguire le operazioni tra le matrici solo se il numero di righe e di colonne di esse rende possibile l'operazione.
Calcoliamo ad esempio la matrice $A - B$.

Cominciamo con il selezionare la matrice **#1** cliccando sopra di essa; quindi premiamo il tasto **F3**: in tal modo la matrice selezionata viene inserita nella riga di inserimento delle espressioni. Scriviamo quindi il segno – e spostiamo il mouse nella finestra algebrica cliccando sulla matrice **#2** al fine di selezionarla; premiamo nuovamente il tasto **F3** per inserire la nuova matrice. Per immettere l'espressione e ottenere il risultato dell'operazione facciamo clic sul pulsante ≚ (FIGURA 4).

$$\#1: \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\#2: \begin{bmatrix} 0 & \pi & 2 \\ -3 & \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\#3: \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\#4: \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \pi & 2 \\ -3 & \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\#5: \begin{bmatrix} 2 & -\pi & -3 \\ 6 & -\sqrt{2}-2 & \frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

FIGURA 4

Dovendo eseguire diverse operazioni su alcune matrici date è preferibile, per semplificare il lavoro, associare un nome a ciascuna di esse. Ad esempio, per assegnare i nomi **m1**, **m2**, **m3** alle matrici già inserite procediamo nel modo seguente.

Scriviamo **m1:=**, selezioniamo la matrice **#1** e premiamo il tasto **F3** per inserire la matrice selezionata. Premiamo infine il tasto *Invio*. Ripetiamo il procedimento per le altre due matrici.
Da questo momento sarà possibile inserire nelle espressioni di *Derive* **m1**, **m2**, **m3** anziché scrivere per esteso le componenti della matrice.
Calcoliamo ad esempio i prodotti **m1∗m3** e **m3∗m1**: è sufficiente inserire tali espressioni e semplificare (FIGURA 5).

#6: $m1 := \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

#7: $m2 := \begin{bmatrix} 0 & \pi & 2 \\ -3 & \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

#8: $m3 := \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

#9: $m1 \cdot m3$

#10: $\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 17 & 0 \end{bmatrix}$

#11: $m3 \cdot m1$

#12: $\begin{bmatrix} 4 & -4 & 11 \\ 9 & -6 & 15 \\ 8 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

FIGURA 5

Con *Derive* è possibile calcolare rapidamente il determinante e l'inversa di una matrice quadrata. Dopo aver inserito la matrice **m4** (FIGURA 6), per calcolarne il determinante immettiamo l'espressione **det(m4)** e semplifichiamo; per calcolarne l'inversa immettiamo l'espressione **m4^–1** e semplifichiamo.

#14: $m4 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & 1 & -2 \\ -4 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

#15: DET(m4)

#16: 900

#17: $m4^{-1}$

#18: $\begin{bmatrix} \frac{1}{30} & -\frac{1}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{15} \\ \frac{1}{15} & \frac{1}{30} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{2}{15} & \frac{1}{30} & \frac{1}{15} \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{15} & \frac{1}{30} \end{bmatrix}$

FIGURA 6

Naturalmente le matrici su cui opera *Derive* possono anche contenere elementi letterali. In **FIGURA 7** si vede come calcolare il determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} x & 1 & 1 & y \\ 1 & x & y & 1 \\ 1 & y & x & 1 \\ y & 1 & 1 & x \end{bmatrix}$$

che viene poi scomposto in fattori.

#19: $\begin{bmatrix} x & 1 & 1 & y \\ 1 & x & y & 1 \\ 1 & y & x & 1 \\ y & 1 & 1 & x \end{bmatrix}$

#20: $\mathrm{DET}\begin{bmatrix} x & 1 & 1 & y \\ 1 & x & y & 1 \\ 1 & y & x & 1 \\ y & 1 & 1 & x \end{bmatrix}$

#21: $x^4 - x^2\cdot(2\cdot y^2 + 4) + 8\cdot x\cdot y + y^2\cdot(y^2 - 4)$

#22: $(x - y)^2\cdot(x + y + 2)\cdot(x + y - 2)$

FIGURA 7

Soluzioni dei quesiti a risposta multipla e degli esercizi vero/falso

1	b
2	c
3	a
16	F
17	V
18	F
19	V
20	F
21	F
22	V
23	a
24	c
68	F
69	V
70	F
71	V
72	F
73	F
74	F
75	V
76	d
77	a ; c ; h
111	c
112	b
113	c
114	a
115	c
134	F
135	V
136	V
137	F