PRODOTTI CON I VETTORI

I prodotti con i vettori sono di **4 tipi:**

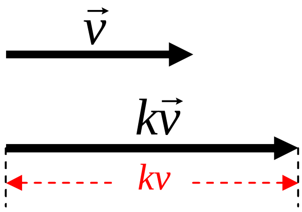
1) il prodotto di un vettore per un numero
2) il prodotto di un vettore per una grandezza scalare
3) il prodotto scalare tra due vettori
4) il prodotto vettoriale tra due vettori

## 1) prodotto di un vettore per un numero

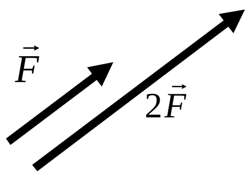
Dato il vettore $\vec{v}$ e il numero *k*, il prodotto $k\vec{v}$ da come <u>risultato un vettore</u> che ha la stessa direzione del vettore $\vec{v}$ , lo stesso verso di $\vec{v}$ se *k* è positivo, verso opposto se *k* è negativo, il modulo uguale al prodotto del modulo di $\vec{v}$ per *k.*

$k\vec{v}$ è una grandezza vettoriale dello stesso tipo di $\vec{v}$

$k\vec{v} \rightarrow$
- Direzione di $\vec{v}$
- Verso $\vec{v}$ se $k>0$, $-\vec{v}$ se $k<0$
- Modulo uguale a $kv$
- Unità di misura di $\vec{v}$




Esempio:



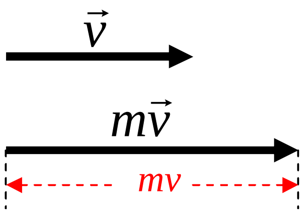

Dato il vettore forza $\vec{F}$ di modulo $F=6N$,
il vettore $2\vec{F}$ è quello costruito in figura.
Il suo modulo vale $\left|2\vec{F}\right| = 2 \cdot 6 = 12N$ e il vettore $2\vec{F}$ è ancora un vettore forza.

## 2) prodotto di un vettore per una grandezza scalare

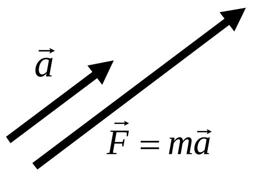
Dato il vettore $\vec{v}$ e la grandezza scalare *m*, il prodotto $m\vec{v}$ da come <u>risultato un vettore</u> che ha la stessa direzione del vettore $\vec{v}$ , lo stesso verso di $\vec{v}$ il modulo uguale al prodotto del modulo di $\vec{v}$ per *m.*

$m\vec{v}$ è una grandezza vettoriale di tipo diverso rispetto a $\vec{v}$

$m\vec{v} \rightarrow$
- Direzione di $\vec{v}$
- Verso $\vec{v}$
- Modulo uguale a $mv$
- Unità di misura uguale al prodotto delle unità di misura dei due vettori



Esempio:




Dato il vettore <u>accelerazione</u> $\vec{a}$ di modulo $a = 3 \, {}^{m}\!/_{s^2}$ , e la <u>massa</u> *m*, con $m = 2\,kg$ , il vettore $m\vec{a}$ è quello costruito in figura.
Il vettore $m\vec{a}$ è una <u>forza</u> , il suo modulo vale $|\vec{F}| = |m\vec{a}| = 3 \cdot 2 = 6N$ .

**3) prodotto scalare di due vettori (simbolo ñ• ñ)**

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ il prodotto scalare tra i due vettori da come <u>risultato una grandezza scalare</u> .

Il prodotto scalare tra i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si calcola moltiplicando il modulo di un vettore per la componente dellôaltro vettore lungo il primo,

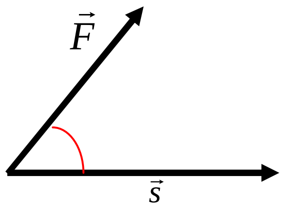
cioè $\vec{a} \bullet \vec{b} = a \cdot b_a = a_b \cdot b$

poiché $b_a = b\cos\alpha$ e $a_b \cdot = a\cos\alpha$

allora risulta $\vec{a} \bullet \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\alpha$ cioè

> Il prodotto scalare di due vettori da come risultato una grandezza scalare che si calcola moltiplicando i moduli dei due vettori per il coseno dellôangolo tra essi compresi.
> Lôunità di misura della grandezza risultante è uguale al prodotto delle unità di misura dei due vettori

Esempio:



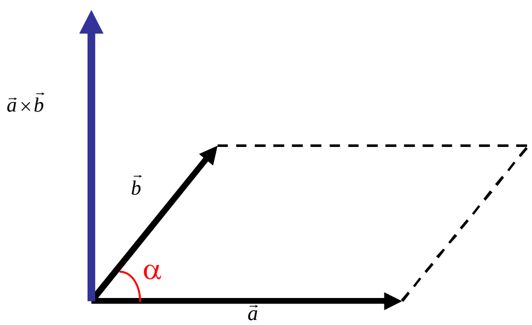

Dato il vettore <u>forza</u> $\vec{F}$ di modulo $F = 5\,N$ , e il vettore <u>spostamento</u> $\vec{s}$ , con $s = 2\,m$ ,. che formano tra loro un angolo di 45°, si ha

$W = \vec{F} \bullet \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos 45° = 5 \cdot 2 \cdot {}^{\sqrt{2}}\!/_{2} = 5\sqrt{2}\ J$

La grandezza risultante *W* è un <u>lavoro</u> e si misura in *joule.*

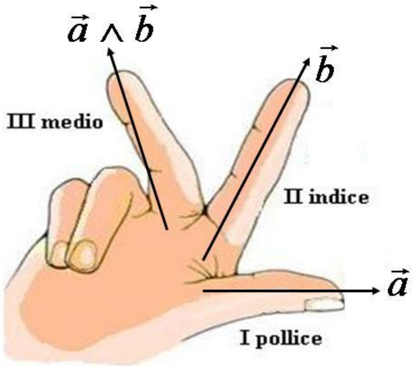
**4) prodotto vettoriale di due vettori (simbolo ñ× ñ oppure ñ∧ ñ )**

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ il prodotto vettoriale tra i due vettori da come <u>risultato una grandezza vettoriale</u> .




Il vettore risultante ha

- modulo pari allôarea del parallelogramma formato dai due vettori
  $|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin\alpha$
- direzione perpendicolare al piano formato dai due vettori
- verso ottenuto con la <u>regola della mano destra</u>




REGOLA DELLA MANO DESTRA

Disporre pollice, indice e medio della mano destra in modo che formino tra loro tre angoli retti.

Porre il pollice (primo dito) nella direzione e verso del primo vettore del prodotto

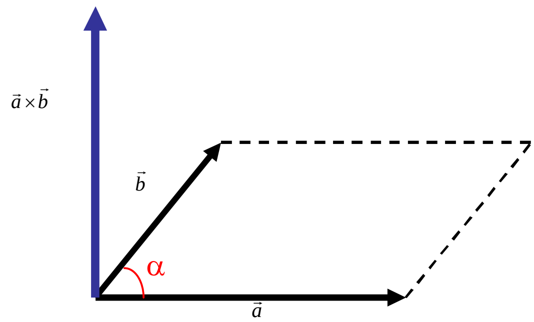
Porre lõindice (secondo dito) nella direzione e verso del secondo vettore del prodotto

Il dito medio (terzo dito) mostra la direzione e il verso del prodotto vettoriale risultante

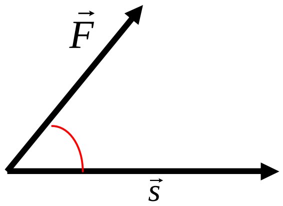
$\vec{a} \times \vec{b}$ è una grandezza vettoriale di tipo diverso rispetto ai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$

$\vec{a} \times \vec{b} \rightarrow$

- Direzione perpendicolare al piano formato dai due vettori
- Verso ottenuto con la r.m.d.
- Modulo $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = a \cdot b \cdot \sin\alpha$ (area del parallelogramma formato dai due vettori)
- Unità di misura uguale al prodotto delle unità di misura dei due vettori




Esempio:




Dati il vettore <u>forza</u> $\vec{F}$ di modulo $F = 6\,N$, e il vettore <u>braccio</u> $\vec{d}$, con $d = 2\,m$,. che formano tra loro un angolo di 45°, si ha $\vec{M} = \vec{F} \times \vec{d}$

- direzione perpendicolare al foglio
- verso entrante nel foglio
- modulo $\left|\vec{M}\right| = F \cdot d \cdot \sin 45° = 6 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}/2 = 6\sqrt{2}\ N \cdot m$

ESERCIZI

[1] Dati i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ che formano un angolo tra loro un angolo $\alpha$, calcola $\vec{a} \bullet \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ e $\vec{b} \times \vec{a}$

1a) $|\vec{a}| = 4$ $|\vec{b}| = 6$ $\alpha = 30°$ [$\vec{a} \bullet \vec{b} = 12\sqrt{3}$; $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = 12$, verso U; $\left|\vec{b} \times \vec{a}\right| = 12$, verso E]

1b) $|\vec{a}| = 2$ $|\vec{b}| = 8$ $\alpha = 45°$ [$\vec{a} \bullet \vec{b} = 8\sqrt{2}$; $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = 8\sqrt{2}$, verso U; $\left|\vec{b} \times \vec{a}\right| = 8\sqrt{2}$, verso E]

1c) $|\vec{a}| = 4$ $|\vec{b}| = 5$ $\alpha = 60°$ [$\vec{a} \bullet \vec{b} = 10$; $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = 10\sqrt{3}$, verso U; $\left|\vec{b} \times \vec{a}\right| = 10\sqrt{3}$, verso E]

1d) $|\vec{a}| = 3$ $|\vec{b}| = 5$ $\alpha = 90°$ [$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$; $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = 15$, verso U; $\left|\vec{b} \times \vec{a}\right| = 15$, verso E]

1e) $|\vec{a}| = 7$ $|\vec{b}| = 4$ $\alpha = 30°$ [$\vec{a} \bullet \vec{b} = 14\sqrt{3}$; $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = 14$, verso U; $\left|\vec{b} \times \vec{a}\right| = 14$, verso E]