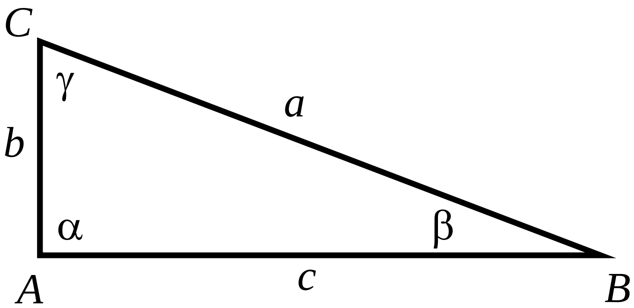
CENNI DI TRIGONOMETRIA

Notazioni convenzionali

Dato il triangolo rettangolo ABC della figura, con $\hat{A} = 90°$
convengo di chiamare:

- i vertici con lettere maiuscole dellõalfabeto latino
- i lati con le lettere minuscole dellõalfabeto latino corrispondenti ai vertici
- gli angoli con le lettere greche corrispondenti ai vertici



quindi:

angolo $\hat{A} = \alpha$ $\leftrightarrow$ lato opposto $BC = a$
angolo $\hat{B} = \beta$ $\leftrightarrow$ lato opposto $AC = b$
angolo $\hat{C} = \gamma$ $\leftrightarrow$ lato opposto $AB = c$

Il lato opposto allõangolo retto, quindi il lato maggiore del triangolo, è chiamato *ipotenusa del triangolo*, gli altri due lati, adiacenti allõangolo retto, sono chiamati *cateti* del triangolo

Definizione di seno e coseno di un angolo

Considerato uno degli angoli acuti, ad esempio β, definisco

<u>SENO</u> dellõangolo β il <u>rapporto</u> tra la misura del <u>cateto opposto allõangolo β</u>, cioè la misura del cateto *b*, <u>e lõipotenusa</u> *a* del triangolo cioè $\sin\beta = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$	<u>COSENO</u> dellõangolo β il <u>rapporto</u> tra la misura del <u>cateto adiacente allõangolo β</u>, cioè la misura del cateto *c*, <u>e lõipotenusa</u> *a* del triangolo cioè $\cos\beta = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$

In modo analogo, per lõangolo γ definisco

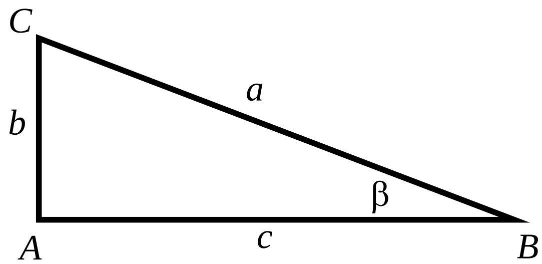
$$\sin\gamma = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a} \quad \left(\frac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}}\right) \qquad \cos\gamma = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a} \quad \left(\frac{\text{cateto adiacente}}{\text{ipotenusa}}\right)$$

Ricordando le relazioni esistenti tra i lati nei triangoli rettangoli isosceli e nei triangoli equilateri possiamo ricavare questa <u>tabella che ci fornisce i valori di seno e coseno di alcuni angoli</u>

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Applicazioni:

1) Primo teorema dei triangoli rettangoli



Dalle relazioni $sen\beta = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$ e $\cos\beta = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$ possiamo ricavare che

$AC = b = a \cdot \sin\beta = BC \cdot \sin\beta$ cioè che:

> **in un triangolo rettangolo un cateto è uguale al prodotto dellôipotenusa per il seno dellôangolo opposto al cateto**

$AB = c = a \cdot \cos\beta = BC \cdot \cos\beta$ cioè che:

> **in un triangolo rettangolo un cateto è uguale al prodotto dellôipotenusa per il coseno dellôangolo adiacente (non retto) al cateto**

esempio di applicazione:
In un triangolo rettangolo *ABC* lôipotenusa misura $\overline{BC} = 12\ cm$ e lôangolo $A\hat{B}C$ è di 60°. Quanto misurano i cateti del triangolo?

Risposta: dai dati del problema ricavo che $a = 12\ cm$ e $\beta = 60°$.

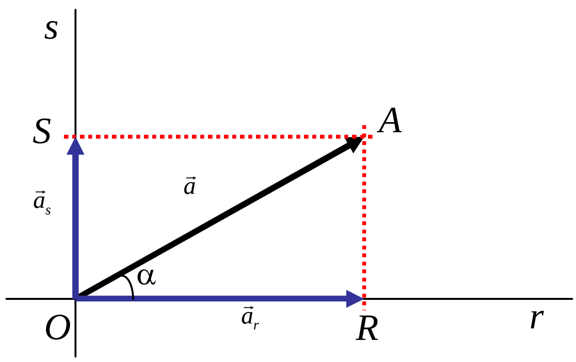
Applico il primo teorema dei triangoli rettangoli:

$$b = AC = a \cdot \sin\beta = 12 \cdot \sin 60° = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\ cm$$

$$c = AB = a \cdot \cos\beta = 12 \cdot \cos 60° = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6\ cm$$

altro esempio di applicazione: scomposizione di un vettore

Eô dato il vettore $\vec{a}$ e le due rette, perpendicolari tra loro, *r* e *s*. Determinare le componenti del vettore $\vec{a}$ lungo le direzioni *r* e *s* sapendo che $\vec{a}$ forma un angolo α con la retta *r*.

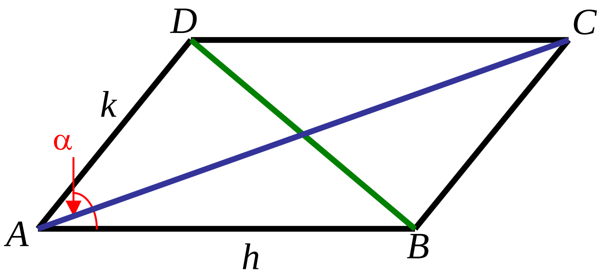


Risoluzione: Traccio le rette passanti per *A* e parallele a *r* e *s* e determino i punti *R* e *S*.

Poiché il triangolo *ORA* è rettangolo con ipotenusa *OA* posso dire che

$$a_r = \overline{OR} = \overline{OA} \cdot \cos\alpha = a \cdot \cos\alpha$$
$$a_s = \overline{OS} = \overline{AR} = \overline{OA} \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\alpha$$

2) Misura delle diagonali di un parallelogramma



Dato il parallelogramma $ABCD$ con :

$\overline{AB} = \overline{CD} = h$, $\overline{BC} = \overline{AD} = k$ e $B\hat{A}D = \alpha$

si ha che:

la diagonale minore misura $\overline{BD} = \sqrt{h^2 + k^2 - 2hk \cdot \cos\alpha}$

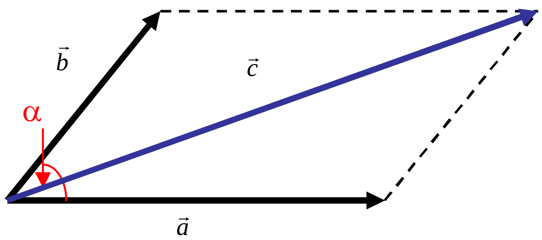
la diagonale maggiore misura $\overline{AC} = \sqrt{h^2 + k^2 + 2hk \cdot \cos\alpha}$

Se $\alpha = 90°$ si ha $\overline{BD} = \overline{AC} = \sqrt{h^2 + k^2}$ (teorema di Pitagora)

applicazione: somma di vettori

Dati i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ della figura, determinare il vettore

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$



Risoluzione: disegno il vettore $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ usando la regola del parallelogramma.

Determino il modulo del vettore:

$$|\vec{c}| = |\vec{a} + \vec{b}| = c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos\alpha}$$

Nel caso particolare $a = 10$, $b = 6$ e $\alpha = 60°$ si ha

$$c = \sqrt{100 + 36 + 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \cos 60°} = \sqrt{100 + 36 + 60} = \sqrt{196} = 14$$

3) Area del parallelogramma

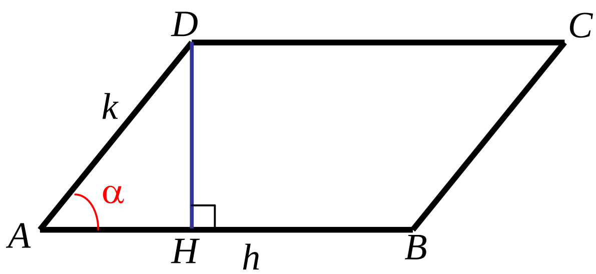
Dato il parallelogramma $ABCD$ con :

$\overline{AB} = \overline{CD} = h$, $\overline{BC} = \overline{AD} = k$ e $B\hat{A}D = \alpha$

traccio lôaltezza DH.

Poiché il triangolo AHD è rettangolo posso dire che $\overline{DH} = \overline{AD} \cdot \sin\alpha = k \cdot \sin\alpha$

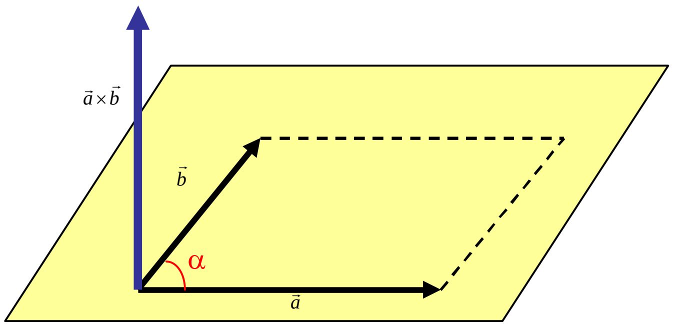
Lôarea del parallelogramma allora risulta



$$A_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{DH} = h \cdot k \cdot \sin\alpha$$

applicazione: prodotto vettoriale

Dati i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ della figura, determinare il vettore $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b}$



Il modulo del vettore $\vec{a}\times\vec{b}$ è uguale all'area del parallelogramma formato dai due vettori

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = ab\sin\alpha$$

la direzione del vettore $\vec{a}\times\vec{b}$ è perpendicolare al piano formato dai due vettori

il verso del vettore $\vec{a}\times\vec{b}$ si ottiene con la regola della mano destra

ESERCIZI

1) Calcola la misura dei cateti *b* e *c* del triangolo rettangolo ABC sapendo che:

1a) $a = 14$	e	$\beta = 30°$	[$b = 7$; $c = 7\sqrt{3}$]
1b) $a = 22$	e	$\beta = 30°$	[$b = 11$; $c = 11\sqrt{3}$]
1c) $a = 14$	e	$\beta = 45°$	[$b = c = 7\sqrt{2}$]
1d) $a = 16$	e	$\beta = 45°$	[$b = c = 8\sqrt{2}$]
1e) $a = 12$	e	$\beta = 60°$	[$b = 6\sqrt{3}$; $c = 6$]
1f) $a = 8$	e	$\beta = 60°$	[$b = 4\sqrt{3}$; $c = 4$]

2) Nel triangolo rettangolo *ABC*, il cateto *AC* misura 13 cm e l'angolo opposto $A\hat{B}C$ è di 30°. Quanto misurano gli altri lati? [ipotenusa BC = 26 cm]

3) Nel triangolo rettangolo *ABC*, il cateto *AC* misura 9 cm e l'angolo opposto $A\hat{B}C$ è di 45°. Quanto misurano gli altri lati? [ipotenusa BC = $9\sqrt{2}$ cm]

4) Nel triangolo rettangolo *ABC*, l'ipotenusa *BC* misura 5 cm e l'angolo $A\hat{B}C$ è di 36° (sen36°=0,59; cos36°=0,81). Quanto misurano gli altri lati? [*AC*=2,95 cm; *AB* = 4,05 cm]

5) Nel triangolo rettangolo *ABC*, l'ipotenusa *BC* misura 12 cm e l'angolo $A\hat{B}C$ è di 65° (sen65°=0,91; cos36°=0,42). Quanto misurano gli altri lati? [*AC*=10,92 cm; *AB* = 5,04 cm]

6) Nel triangolo rettangolo *ABC*, l'ipotenusa *BC* misura 8 cm e l'angolo $A\hat{B}C$ è di 48° (sen48°=0,74; cos48°=0,67). Quanto misurano gli altri lati? [*AC*=5,92 cm; *AB* = 5,36 cm]

7) I lati del parallelogramma *ABCD* misurano $\overline{AB}$=12cm, $\overline{AD}$=8cm e l'angolo di vertice *A* è di 45°. Calcola la misura delle diagonali e l'area del parallelogramma.
[diag.mag.=18,54 cm. diag.min.=8,50 cm area=67,88 cm^2]

8) I lati del parallelogramma *ABCD* misurano $\overline{AB}$=8cm, $\overline{AD}$=5cm e l'angolo di vertice *A* è di 60°. Calcola la misura delle diagonali e l'area del parallelogramma.
[diag.mag.=11,4 cm. diag.min.=7,0 cm area=34,64 cm^2]

9) I lati del parallelogramma *ABCD* misurano $\overline{AB}$=6cm, $\overline{AD}$=9cm e l'angolo di vertice *A* è di 30°. Calcola la misura delle diagonali e l'area del parallelogramma.
[diag.mag.=14,51 cm. diag.min.=4,84 cm area=27 cm^2]

10) I lati del parallelogramma *ABCD* misurano $\overline{AB}$=12cm, $\overline{AD}$=15cm e l'angolo di vertice *A* è di 54° (sen48°=0,81; cos48°=0,59). Calcola la misura delle diagonali e l'area del parallelogramma.
[diag.mag.=24,10 cm. diag.min.=12,55 cm area=145,62 cm^2]