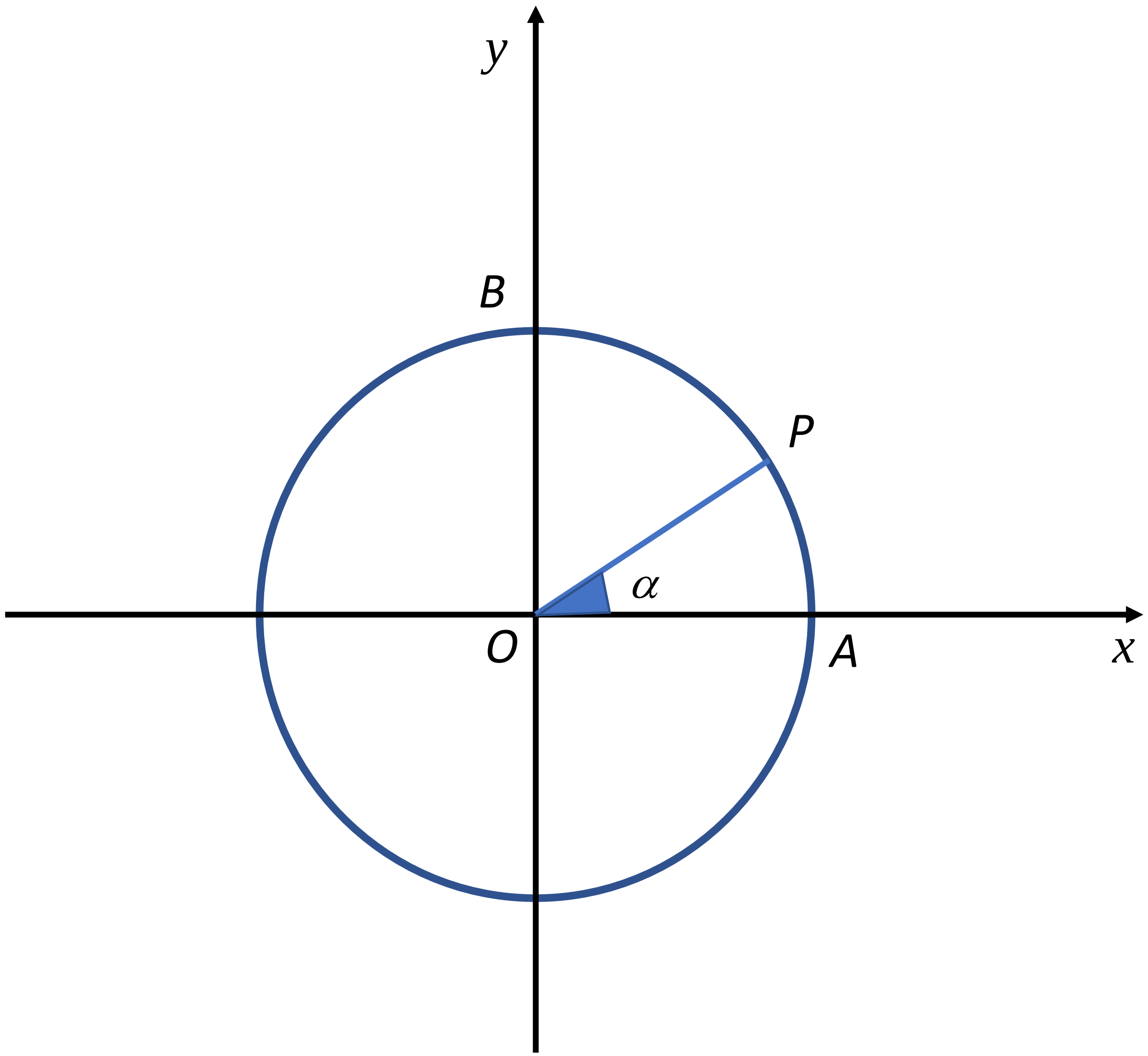


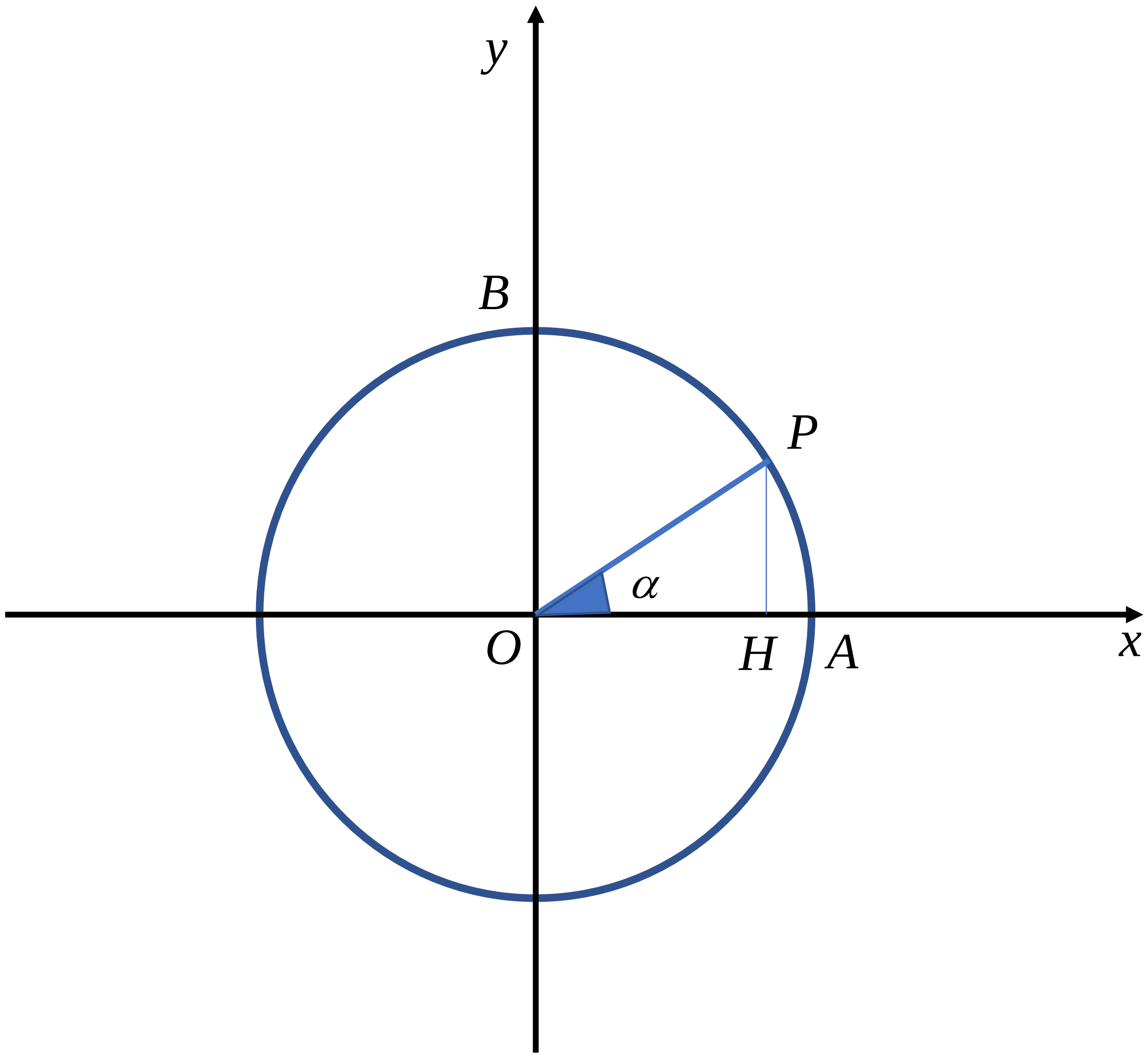
In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xOy prendiamo una circonferenza con centro nell'origine e raggio di misura 1 (CIRCONFERENZA GONIOMETRICA)

Chiamiamo *A* il punto in cui la circonferenza incontra il semiasse positivo dell'asse delle ascisse e *B* il punto in cui la circonferenza incontra il semiasse positivo dell'asse delle ordinate

$$A(1;0) \quad B(0;1)$$

Considero l'angolo $\widehat{AOP} = \alpha$

Chiamo:
- *OA* primo lato dell'angolo
- *OB* secondo lato dell'angolo
- *A* primo estremo dell'angolo
- *B* secondo estremo dell'angolo



SENO e COSENO

Definisco:

Il **seno** di α è l'ordinata del secondo estremo dell'angolo α

$$sin\alpha = sen\alpha = y_P$$

Il **coseno** di α è l'ascissa del secondo estremo dell'angolo α

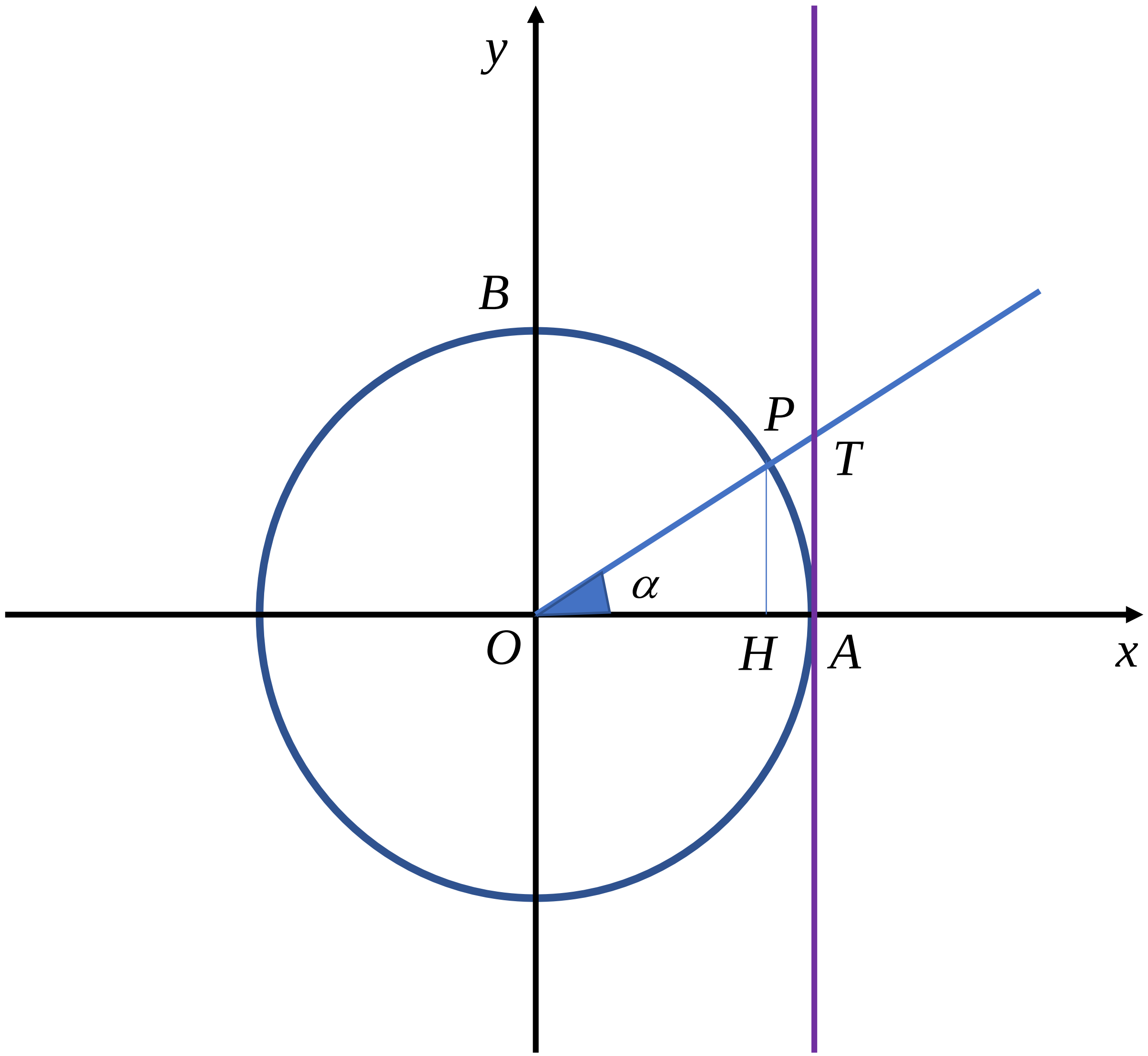
$$cos\alpha = x_P$$

Quindi $P(cos\alpha; sen\alpha)$

Vale la

I relazione fondamentale della goniometria

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$



Traccio la retta tangente alla circonferenza goniometrica e passante per il punto *A* e prolungo il secondo lato dell'angolo fino ad incontrare questa retta in *T*

Definisco:

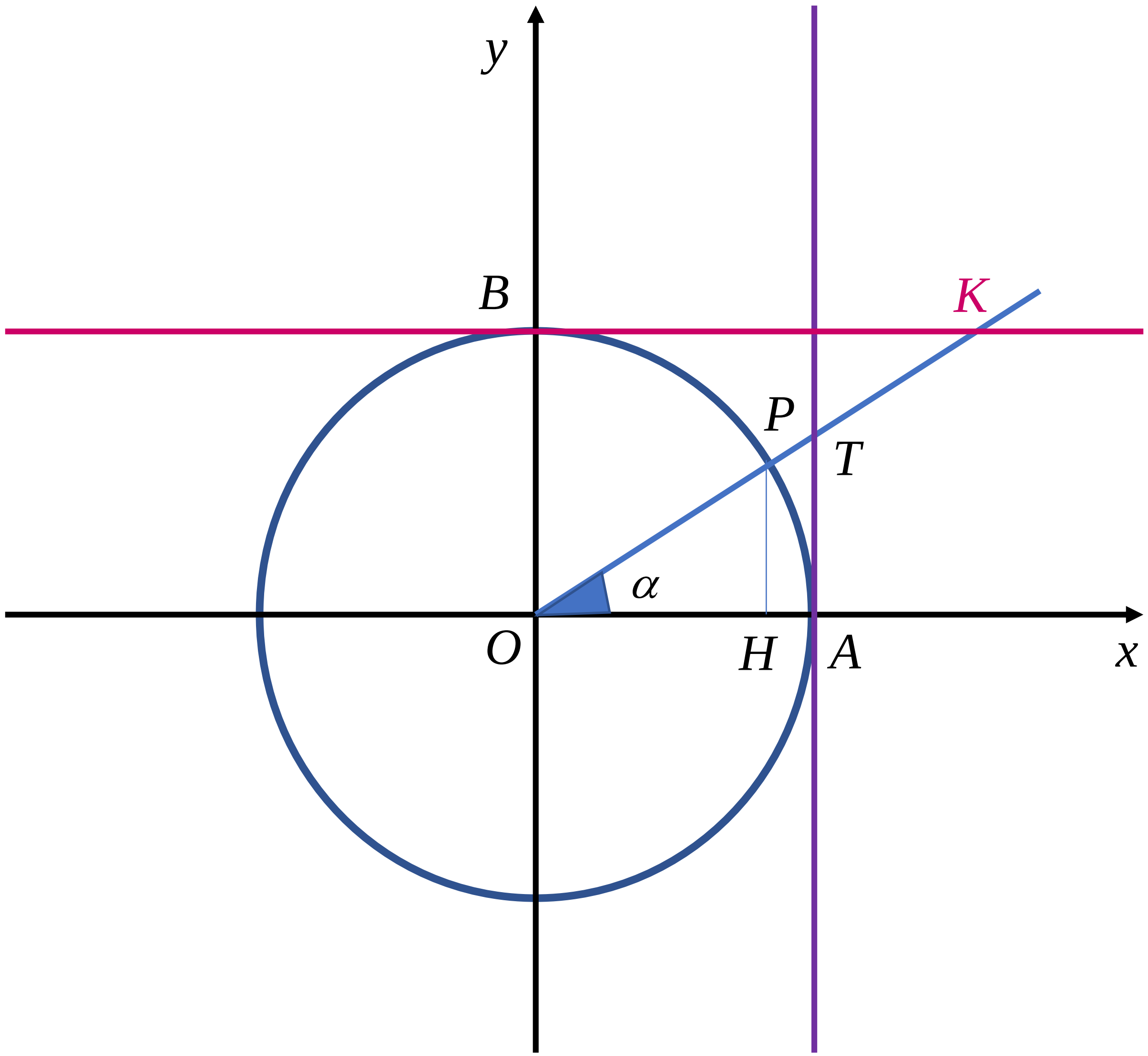
La **tangente** goniometrica dell'angolo α è l'ordinata del punto, se esiste, in cui il prolungamento del secondo lato dell'angolo incontra la retta tangente alla circonferenza goniometrica e passante per il punto in cui tale circonferenza incontra il semiasse positivo dell'asse delle ascisse

$$tan\alpha = tag\alpha = tg\alpha = y_T$$

Quindi $T(1; tan\alpha)$

Perchè *T* esista è necessario che $\boldsymbol{\alpha \neq {}^{\pi}/_{2} + k\pi}$

TANGENTE



Traccio la retta tangente alla circonferenza goniometrica e passante per il punto *B* e prolungo il secondo lato dell'angolo fino ad incontrare questa retta in *K*

Definisco:

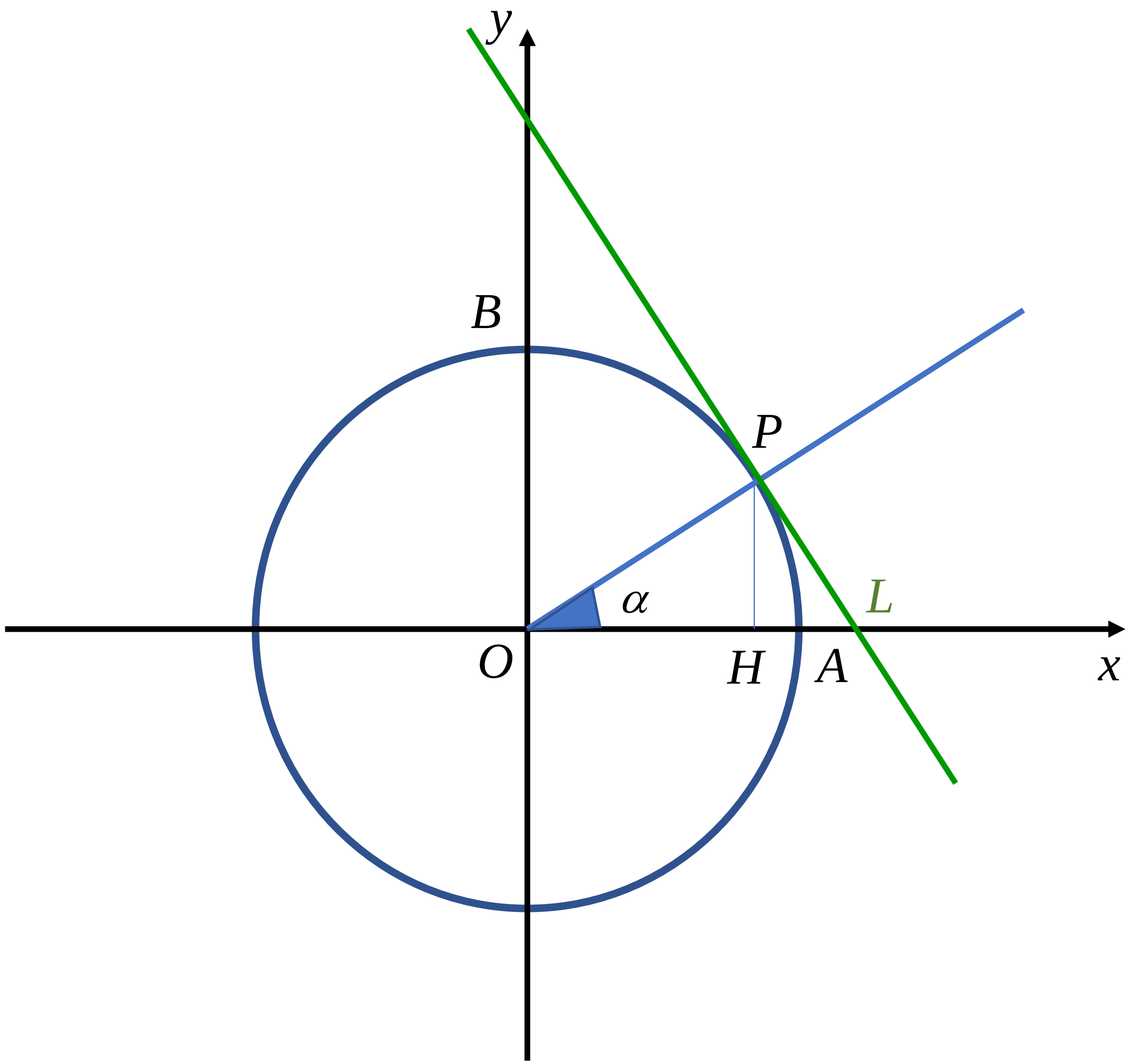
La **cotangente** dell'angolo α è l'ascissa del punto, se esiste, in cui il prolungamento del secondo lato dell'angolo incontra la retta tangente alla circonferenza goniometrica e passante per il punto in cui tale circonferenza incontra il semiasse positivo dell'asse delle ordinate

$$cot\alpha = cotg\alpha = ctg\alpha = x_K$$

Quindi $K(cot\alpha; 1)$

Perchè *K* esista è necessario che $\alpha \neq k\pi$

COTANGENTE



Traccio la retta tangente alla circonferenza goniometrica e passante per il punto *P* e chiamo *L* il punto in cui questa retta incontra l'asse delle ascisse

Definisco:

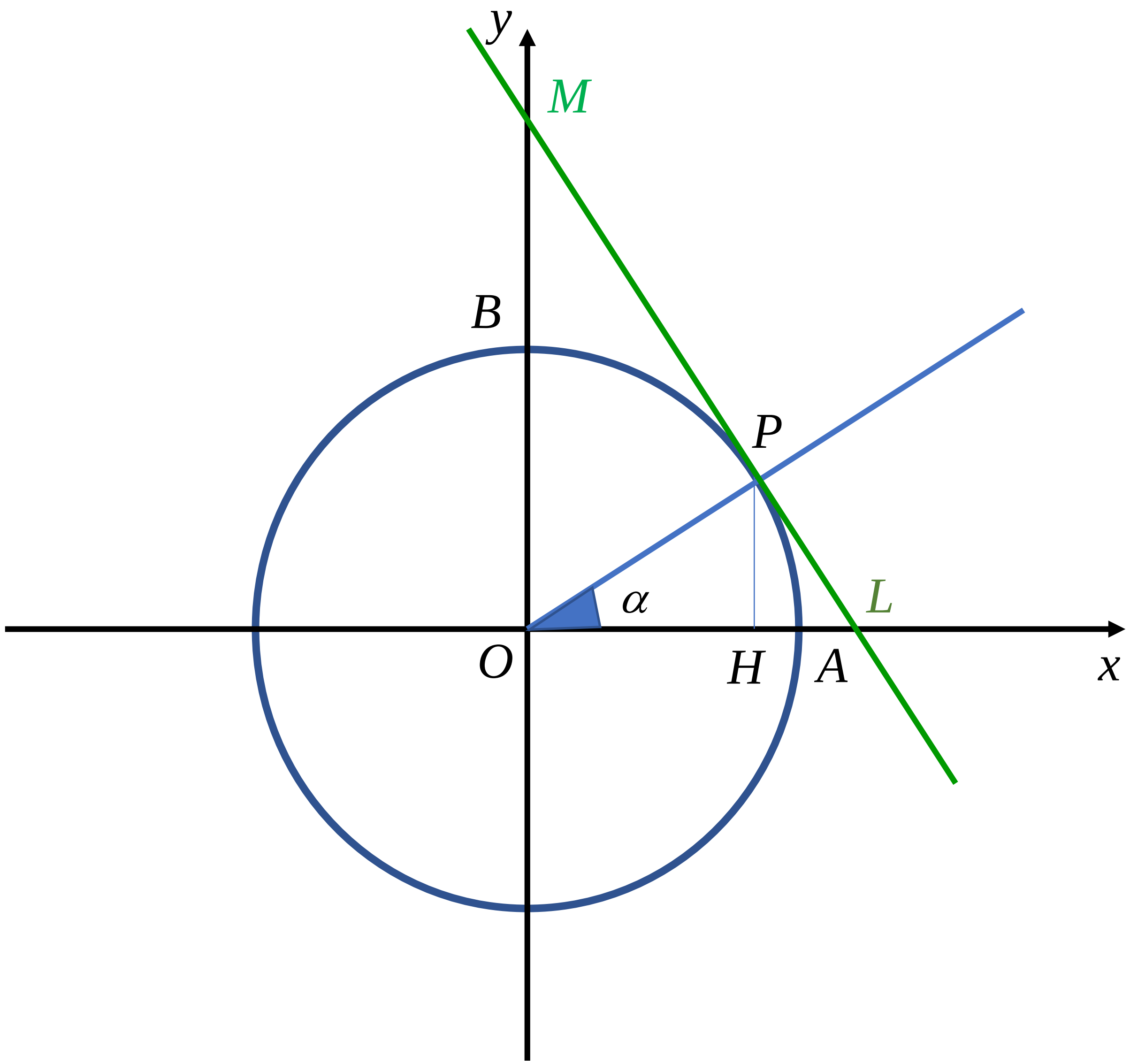
La **secante** dell'angolo α è l'ascissa del punto, se esiste, in cui la retta che passa per il secondo estremo dell'angolo ed è tangente alla circonferenza goniometrica incontra l'asse delle ascisse

$$sec\alpha = x_L$$

Quindi $L(sec\alpha; 0)$

Perchè *L* esista è necessario che $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$

SECANTE



Traccio la retta tangente alla circonferenza goniometrica e passante per il punto *P* e chiamo *M* il punto in cui questa retta incontra l'asse delle ordinate

Definisco:

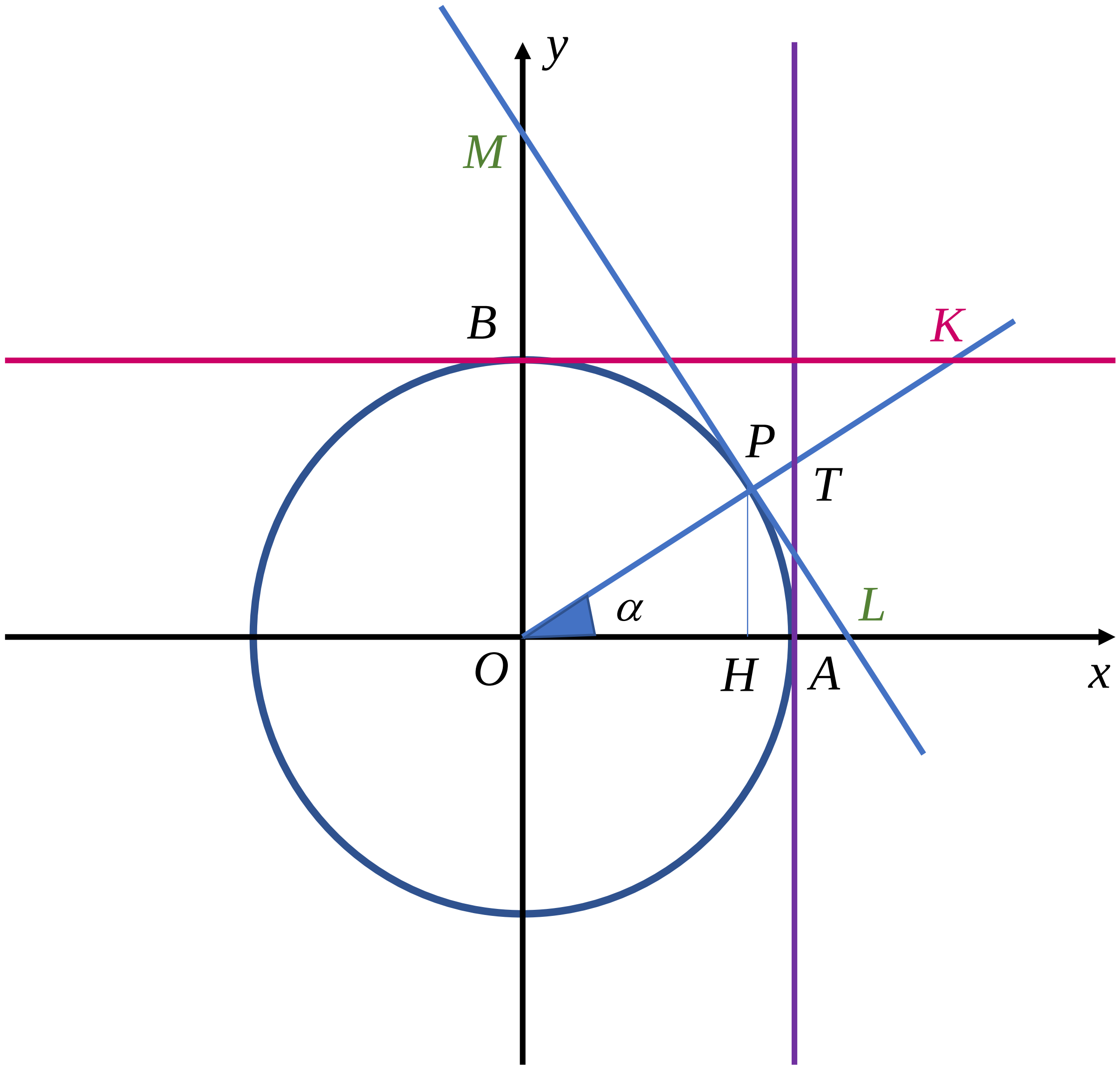
La **cosecante** dell'angolo α è l'ordinata del punto, se esiste, in cui la retta che passa per il secondo estremo dell'angolo ed è tangente alla circonferenza goniometrica incontra l'asse delle ordinate

$$coseca = csc\alpha = y_M$$

Quindi $M(0;coseca)$

Perchè *M* esista è necessario che $\alpha \neq k\pi$

COSECANTE



Riassumendo il tutto:

$A(1;0) \quad B(0;1)$

$P(cos\alpha; sen\alpha)$

$T(1; tan\alpha)$

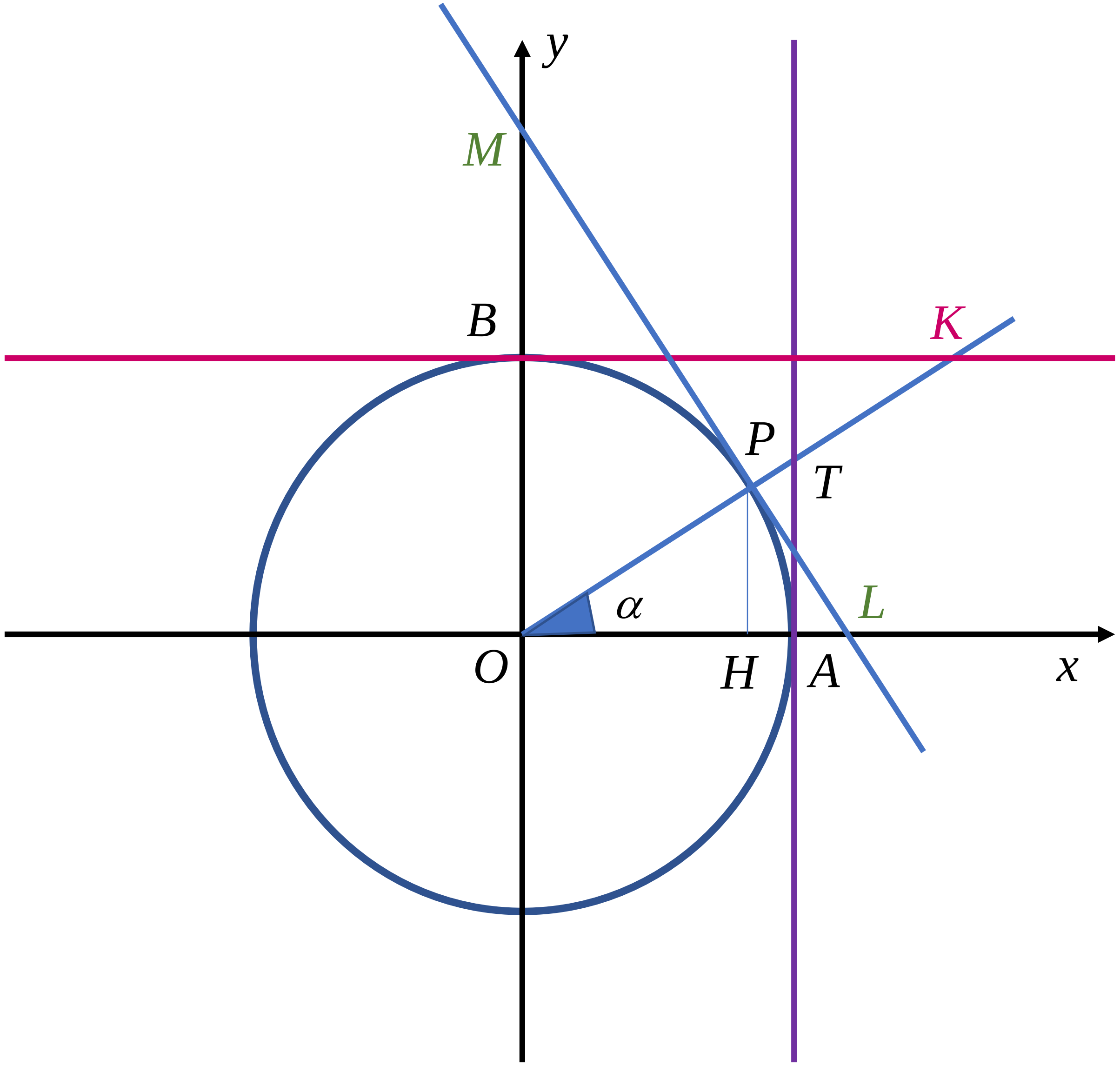
$K(cot\alpha; 1)$

$L(sec\alpha; 0)$

$M(0;cosec\alpha)$

(con $\alpha \neq {}^{\pi}/_{2} + k\pi \;\; e \; \alpha \neq k\pi$)

Le cinque funzioni goniometriche sono legate fra loro dalle seguenti relazioni (**relazioni fondamentali della goniometria**):



I relazione fondamentale della goniometria

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

II relazione fondamentale della goniometria

$$tan\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} \qquad \alpha \neq {}^{\pi}/_{2} + k\pi$$

III relazione fondamentale della goniometria

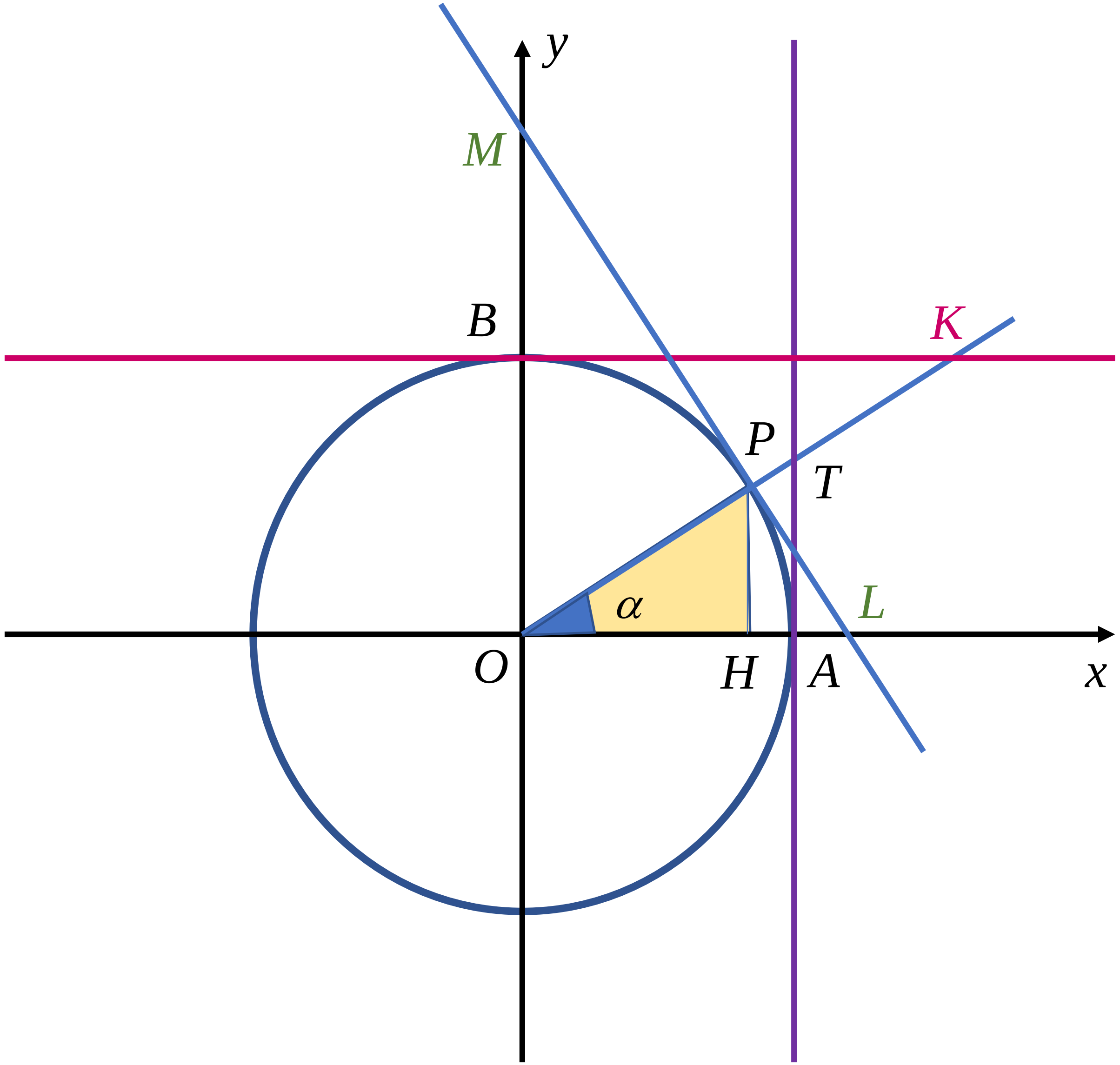
$$cot\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha} \qquad \alpha \neq k\pi$$

IV relazione fondamentale della goniometria

$$sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha} \qquad \alpha \neq {}^{\pi}/_{2} + k\pi$$

V relazione fondamentale della goniometria

$$cosec\alpha = \frac{1}{sen\alpha} \qquad \alpha \neq k\pi$$



Dimostrazione delle relazioni fondamentali della goniometria:

I relazione fondamentale della goniometria

$$\boldsymbol{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

Considero il triangolo rettangolo OHP.
Vale il teorema di Pitagora quindi posso dire che

$$\overline{PH}^2 + \overline{OH}^2 = \overline{OP}^2$$

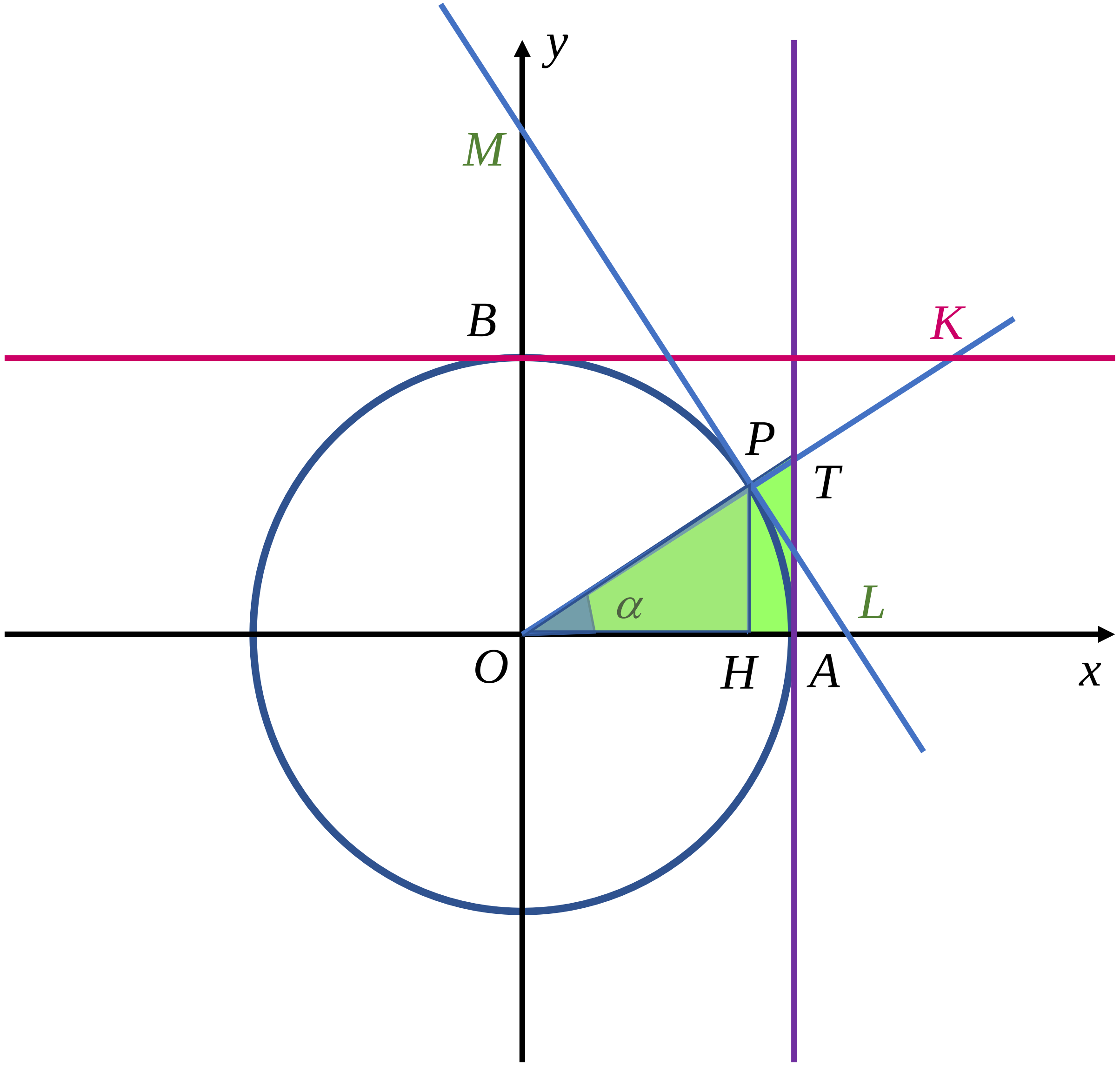
Ma per definizione è

$$\overline{PH} = sen\alpha \quad \overline{OH} = cos\alpha \quad \overline{OP} = 1$$

Sostituisco nella relazione per ottenere la tesi

$$\boldsymbol{(sen\alpha)^2 + (cos\alpha)^2 = (1)^2}$$

Dimostrazione delle relazioni fondamentali della goniometria:



II relazione fondamentale della goniometria

$$\boldsymbol{tan\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} \qquad \alpha \neq {}^{\pi}/_{2} + k\pi}$$

Considero i triangoli OHP e OAT.
I due triangoli sono simili perché rettangoli con l’angolo in O in comune.

Posso impostare una proporzione tra i loro lati:

$$\overline{TA} : \overline{OA} = \overline{PH} : \overline{OH}$$

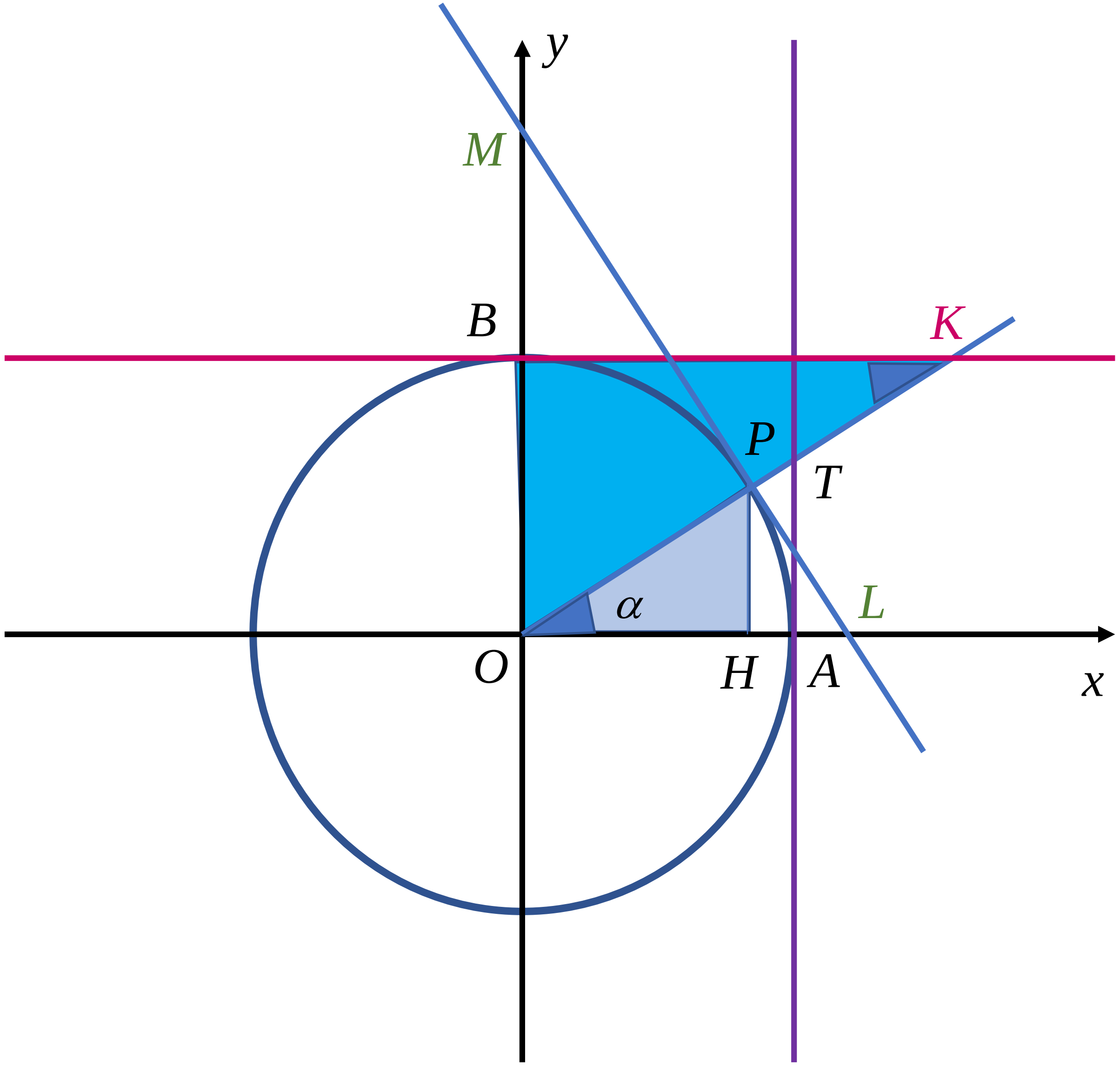
Ma per definizione è

$\overline{TA} = tan\alpha \quad \overline{OA} = 1 \quad \overline{PH} = sen\alpha \quad \overline{OH} = cos\alpha$

Sostituisco nella relazione per ottenere la tesi

$$tan\alpha : 1 = sen\alpha : cos\alpha$$

Dimostrazione delle relazioni fondamentali della goniometria:



III relazione fondamentale della goniometria

$$\boldsymbol{cot\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha} \qquad \alpha \neq k\pi}$$

Considero i triangoli OHP e KBO. Gli angoli $P\widehat{O}H$ e $O\widehat{K}B$ sono uguali perché alterni interni e quindi i due triangoli sono simili perché hanno gli angoli congruenti

Posso impostare una proporzione tra i loro lati:

$$\overline{BK} : \overline{OB} = \overline{OH} : \overline{PH}$$

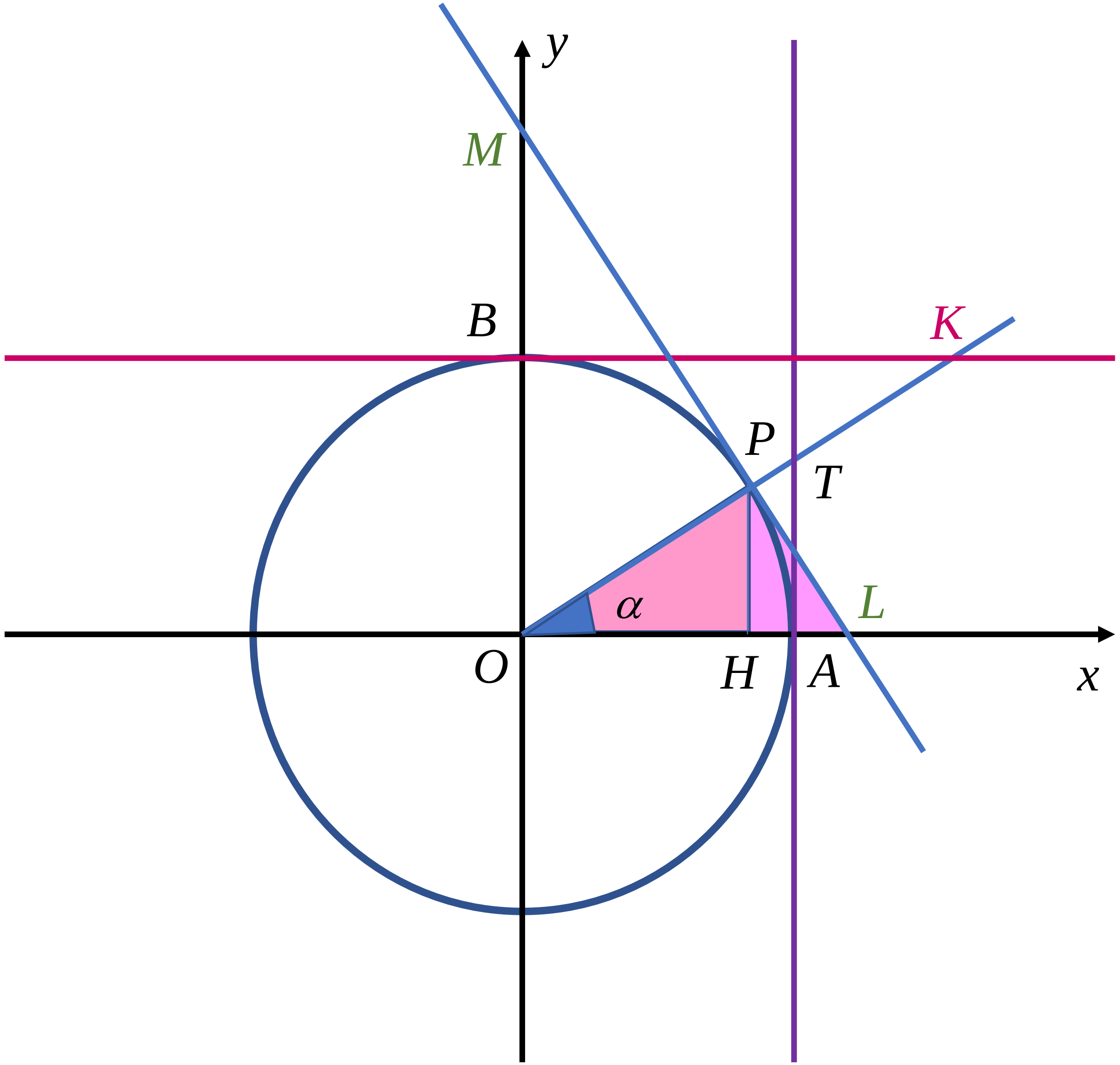
Ma per definizione è

$$\overline{BK} = cot\alpha \quad \overline{OB} = 1 \quad \overline{PH} = sen\alpha \quad \overline{OH} = cos\alpha$$

Sostituisco nella relazione per ottenere la tesi

$$cot\alpha : 1 = cos\alpha : sen\alpha$$

Dimostrazione delle relazioni fondamentali della goniometria:



IV relazione fondamentale della goniometria

$$\boldsymbol{sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha} \quad \alpha \neq {}^{\pi}/_{2} + k\pi}$$

Considero i triangoli OHP e OPL.
I due triangoli sono simili perché sono rettangoli e hanno l’angolo in O in comune.

Posso impostare una proporzione tra i loro lati:

$$\overline{OL} : \overline{OP} = \overline{OP} : \overline{OH}$$ (tra ipotenuse e cateti adiacenti ad α)

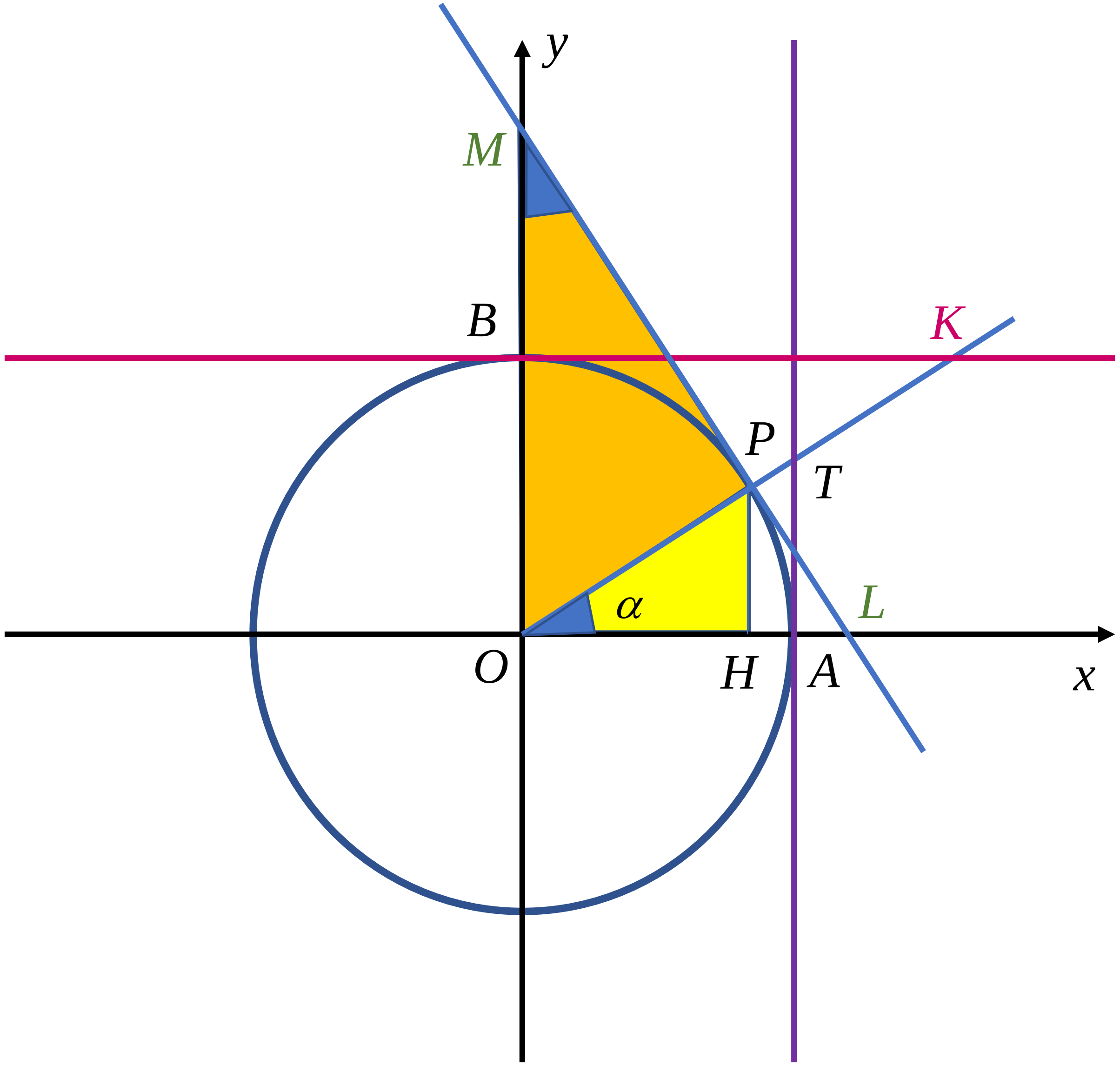
Ma per definizione è

$$\overline{OL} = sec\alpha \quad \overline{OP} = 1 \quad \overline{OH} = cos\alpha$$

Sostituisco nella relazione per ottenere la tesi

$$sec\alpha : 1 = 1 : cos\alpha$$

Dimostrazione delle relazioni fondamentali della goniometria:



V relazione fondamentale della goniometria

$$coseca = \frac{1}{sen\alpha} \qquad \boldsymbol{\alpha \neq k\pi}$$

Considero i triangoli OHP e MPO. Gli angoli $P\hat{O}H$ e $O\hat{M}P$ sono uguali perché complementari dell'angolo $M\hat{O}P$ quindi i due triangoli sono simili perché hanno gli angoli congruenti

Posso impostare una proporzione tra i loro lati:

$$\overline{OM} : \overline{OP} = \overline{OP} : \overline{PH}$$

(tra ipotenuse e cateti opposti ad α)

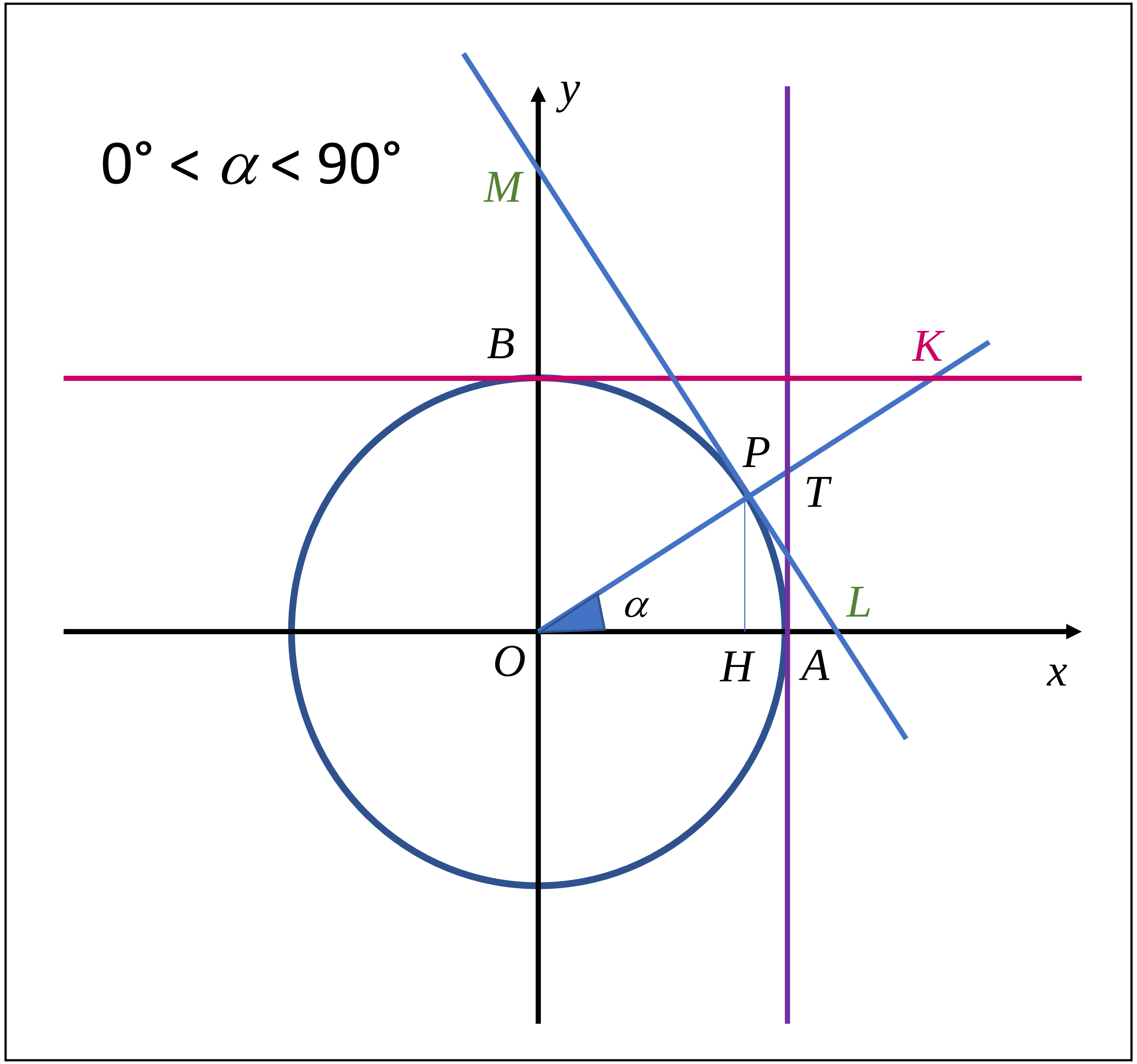
Ma per definizione è

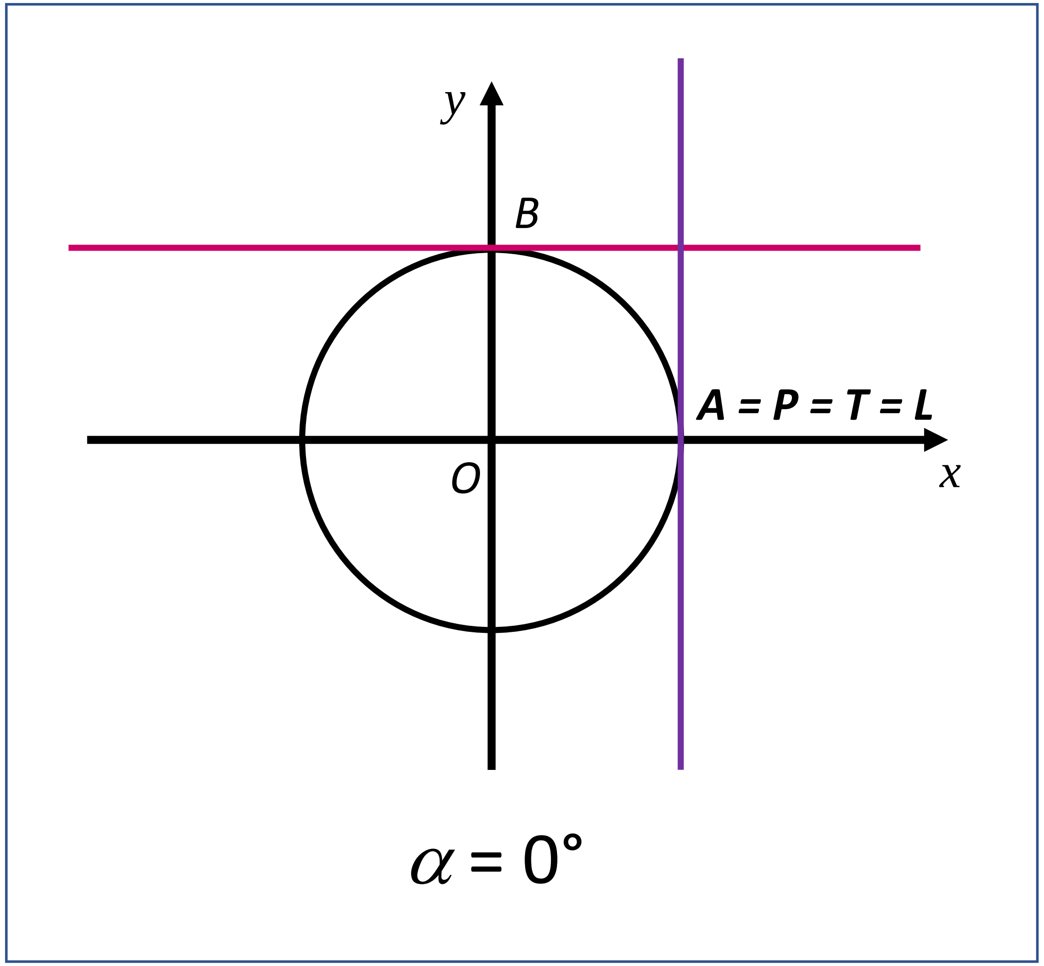
$$\overline{OM} = coseca \quad \overline{OP} = 1 \quad \overline{PH} = sen\alpha$$

Sostituisco nella relazione per ottenere la tesi

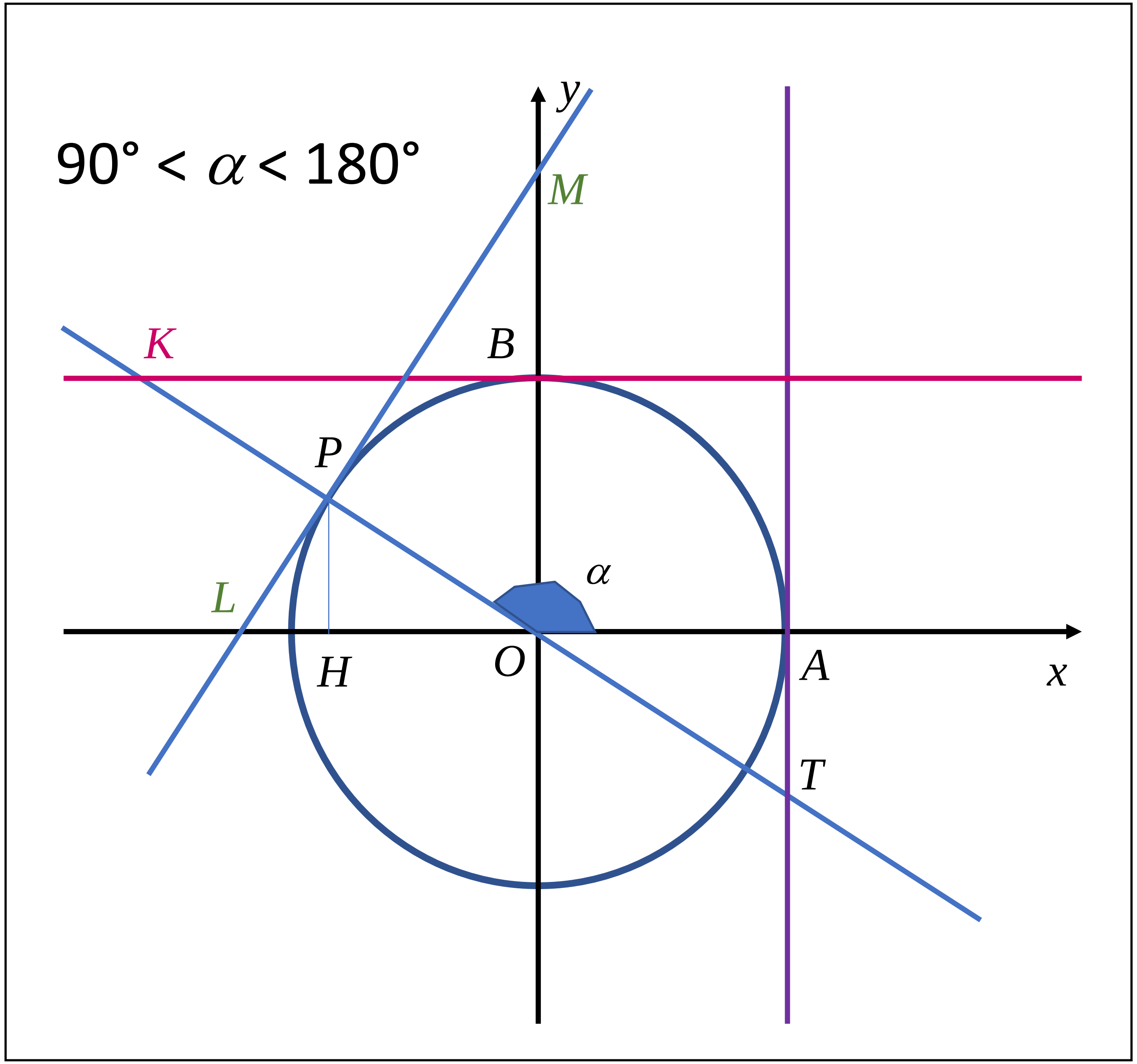
$$coseca : 1 = 1 : sen\alpha$$

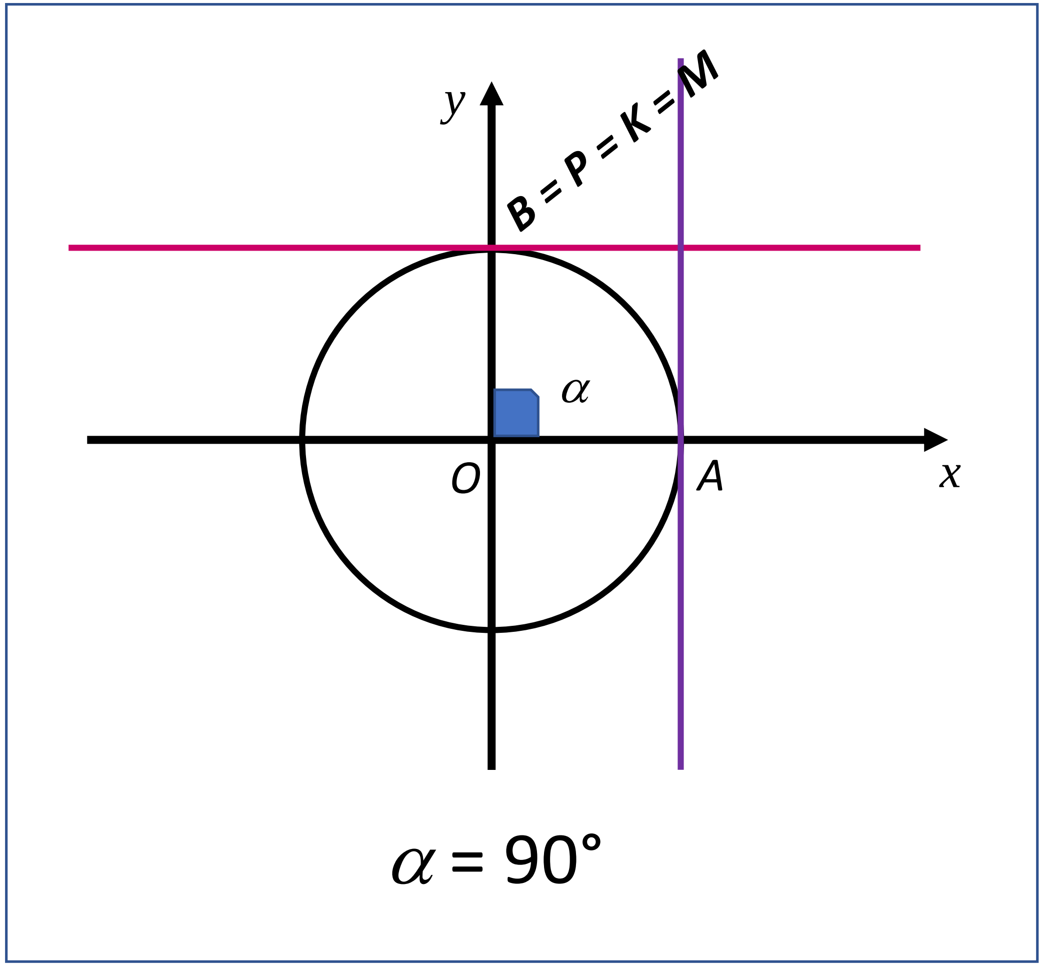
Variazioni delle funzioni goniometriche



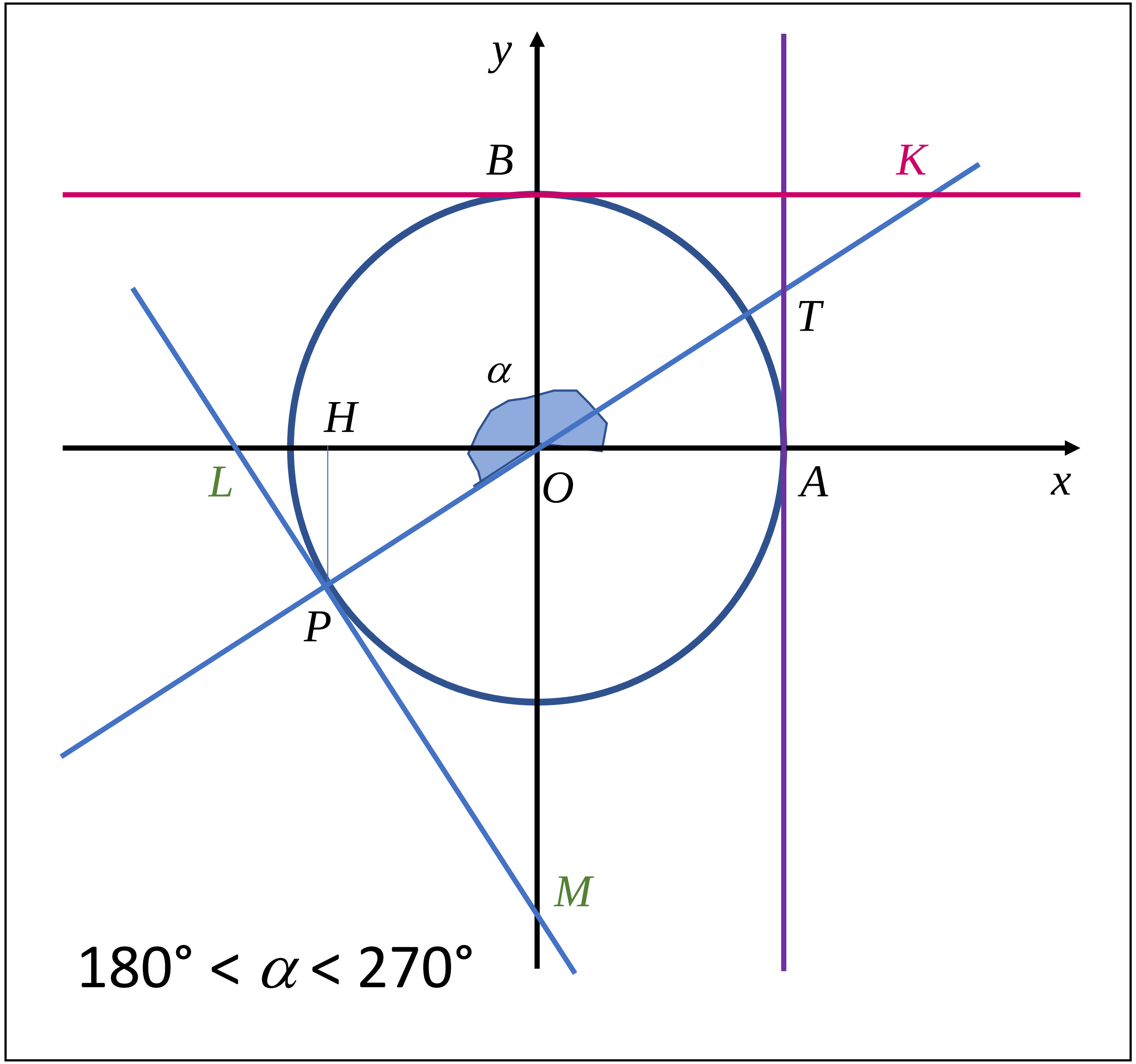


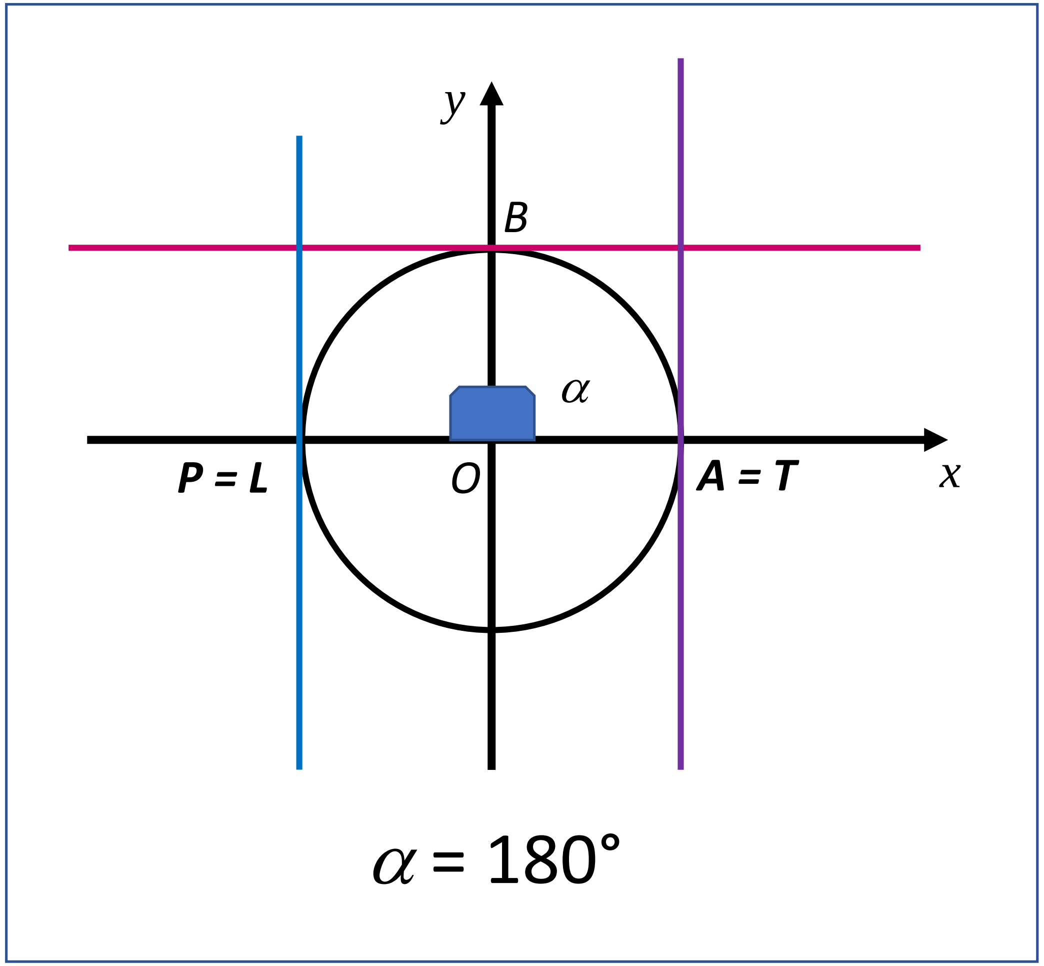
Variazioni delle funzioni goniometriche

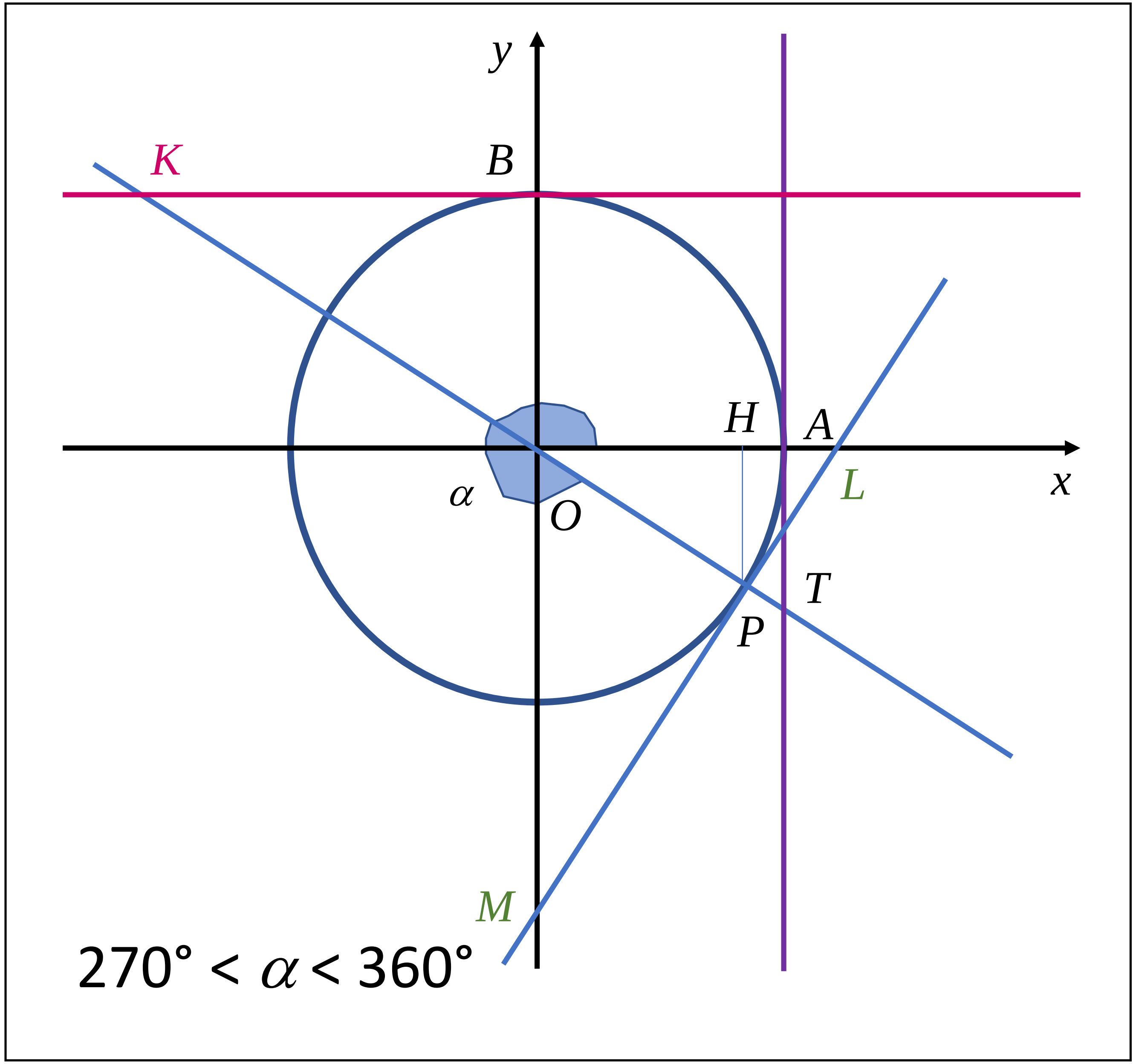




Variazioni delle funzioni goniometriche







Variazioni delle funzioni goniometriche