FORMULE DI PROSTAFERESI E FORMULE DI WERNER

Formule di prostaferesi	Formule di Werner
Dati due angoli p e q	(J. Werner 1468-1528)
1. $\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$	Dati due angoli α e β
2. $\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$	1. $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$
3. $\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$	2. $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$
4. $\sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$	3. $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

Dimostrazione delle formule

Entrambi i gruppi di formule si ricavano dalle formule di somma e sottrazione.

Infatti dati due angoli α e β si ha

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad \text{e} \quad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

sommo membro a membro queste relazioni

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta \qquad (1)$$

sottraggo membro a membro queste relazioni

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$-\cos(\alpha-\beta)=-\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta \qquad (2)$$

Dalla relazione (1), invertendo i due membri e dividendo il tutto per 2 ottengo la prima formula di Werner

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

Dalla relazione (2), invertendo i due membri e dividendo il tutto per 2 ottengo la seconda formula di Werner

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

Se pongo $\begin{cases}\alpha+\beta=p\\ \alpha-\beta=q\end{cases}$ e poi risolvo il sistema rispetto a p e q (metodo della riduzione) ottengo $\begin{cases}\alpha=\dfrac{p+q}{2}\\ \beta=\dfrac{p-q}{2}\end{cases}$

Sostituendo il tutto nella relazione (1)

$$\underset{\displaystyle p}{\underset{\downarrow}{\cos(\alpha+\beta)}}+\underset{\displaystyle q}{\underset{\downarrow}{\cos(\alpha-\beta)}}=2\cdot\underset{\displaystyle \frac{p+q}{2}}{\underset{\downarrow}{\cos\alpha}}\cdot\underset{\displaystyle \frac{p-q}{2}}{\underset{\downarrow}{\cos\beta}}$$

ottengo la prima formula di prostaferesi

Sostituendo il tutto nella relazione (2)

$$\underset{\displaystyle p}{\underset{\downarrow}{\cos(\alpha+\beta)}}-\underset{\displaystyle q}{\underset{\downarrow}{\cos(\alpha-\beta)}}=-2\cdot\underset{\displaystyle \frac{p+q}{2}}{\underset{\downarrow}{\sin\alpha}}\cdot\underset{\displaystyle \frac{p-q}{2}}{\underset{\downarrow}{\sin\beta}}$$

ottengo la seconda formula di prostaferesi

Per le altre formule procedo in modo analogo, infatti dati due angoli α e β si ha

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad \text{e} \quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

sommo membro a membro queste relazioni

$$\begin{array}{l}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\ \hline \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta\end{array} \qquad (3)$$

sottraggo membro a membro queste relazioni

$$\begin{array}{l}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ -\sin(\alpha-\beta)=-\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \hline \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta\end{array}$$

Dalla relazione (3), invertendo i due membri e dividendo il tutto per 2 ottengo la terza formula di Werner

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

Se pongo $\begin{cases}\alpha+\beta=p\\ \alpha-\beta=q\end{cases}$ e poi risolvo il sistema rispetto a p e q (metodo della riduzione) ottengo $\begin{cases}\alpha=\dfrac{p+q}{2}\\ \beta=\dfrac{p-q}{2}\end{cases}$

Sostituendo il tutto nella relazione (3)

$$\begin{array}{ccccc} \sin(\alpha+\beta) & +\sin(\alpha-\beta) & = 2\cdot\sin\alpha & \cdot\cos\beta \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ p & q & \dfrac{p+q}{2} & \dfrac{p-q}{2} \end{array}$$

ottengo la terza formula di prostaferesi

Sostituendo il tutto nella relazione (4)

$$\begin{array}{ccccc} \sin(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha-\beta) & = 2\cdot\cos\alpha & \cdot\sin\beta \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ p & q & \dfrac{p+q}{2} & \dfrac{p-q}{2} \end{array}$$

ottengo la quarta formula di prostaferesi

Formule di prostaferesi per la tangente e la cotangente

Utilizzando in modo opportuno le formule di prostaferesi posso ricavare le seguenti formule

$con\ p\ e\ q \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$

1. $\tan p+\tan q = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$
2. $\tan p-\tan q = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$

$con\ p\ e\ q \neq k\pi$

3. $\cot p+\cot q = \dfrac{\sin(q+p)}{\sin p\sin q}$
4. $\cot p-\cot q = \dfrac{\sin(q-p)}{\sin p\sin q}$

Esempi di utilizzo delle formule di prostaferesi e di Werner

[A] Verificare la seguente identità $\dfrac{\sin 3x+\sin 2x+\sin x}{\cos 3x+\cos 2x+\cos x}=\tan 2x$

Applico le formule di prostaferesi al primo membro dell'identità:

$$I=\frac{\sin 3x+\sin 2x+\sin x}{\cos 3x+\cos 2x+\cos x}=\frac{(\sin 3x+\sin x)+\sin 2x}{(\cos 3x+\cos x)+\cos 2x}=\frac{2\sin 2x\cos x+\sin 2x}{2\cos 2x\cos x+\cos 2x}=\frac{\sin 2x(2\cos x+1)}{\cos 2x(2\cos x+1)}=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=II$$ c.v.d

[B] Risolvere la seguente equazione $\cos 5x-\cos 3x+\sin x=0$

Applico la seconda formula di prostaferesi ai due termini con il coseno:

$$-2\sin 4x\sin x+\sin x=0 \quad\rightarrow\quad \sin x(2\sin 4x-1)=0$$

$$\rightarrow\quad \sin x=0 \quad \text{e} \quad 2\sin 4x=1$$

$$\sin x=0 \;\downarrow\; \boxed{x=k\pi}$$

$$2\sin 4x=1 \;\downarrow\; \sin 4x=\tfrac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 4x=\pi/6+2k\pi \rightarrow \\ 4x=5\pi/6+2k\pi \rightarrow \end{cases} \boxed{\begin{array}{l} x=\pi/24+k\pi/2 \\ x=5\pi/24+k\pi/2 \end{array}}$$

[C] Calcolare il valore della seguente espressione $\sin 17^\circ\cos 13^\circ+\sin 73^\circ\sin 13^\circ$

Applico le formule di Werner:

$$\sin 17^\circ\cos 13^\circ+\sin 73^\circ\sin 13^\circ=\frac{1}{2}\left[\sin(17^\circ+13^\circ)+\sin(17^\circ-13^\circ)\right]-\frac{1}{2}\left[\cos(73^\circ+13^\circ)-\cos(73^\circ-13^\circ)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}[\sin(30°)+\sin(4°)]-\frac{1}{2}[\cos(86°)-\cos(60°)]=\frac{1}{2}[\sin 30°+\sin 4°-\cos 86°+\cos 60°]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}$$

dato che $\sin 4° = \sin(90°-86°)=\cos 86°$

[D] Risolvere la seguente equazione $\sin x \cdot \cos 2x = \sin 3x$

Applico la terza formula di Werner al primo membro

$$\frac{1}{2}[\sin(x+2x)+\sin(x-2x)]=\sin 3x \quad\rightarrow\quad \frac{1}{2}[\sin(3x)+\sin(-x)]=\sin 3x \quad\rightarrow\quad \sin 3x-\sin x = 2\sin 3x \quad\rightarrow$$

$\rightarrow \quad \sin 3x+\sin x=0$ applico la terza formula di prostaferesi $2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}=0 \quad\rightarrow$

$\rightarrow \quad \sin 2x \cos x = 0 \quad \rightarrow \quad \sin 2x = 0$ e $\cos x = 0$

$$\boxed{x=k\pi/2} \leftarrow 2x=k\pi \qquad\qquad \boxed{x=\pi/2+k\pi}$$