Problema n. 1: CURVA NORD

Sei il responsabile della gestione del settore "Curva Nord" dell'impianto sportivo della tua città e devi organizzare tutti i servizi relativi all'ingresso e all'uscita degli spettatori, nonché alla sicurezza e all'assistenza agli spettatori stessi. La forma del settore sotto la tua gestione è una porzione di corona circolare come rappresentata in figura 1.

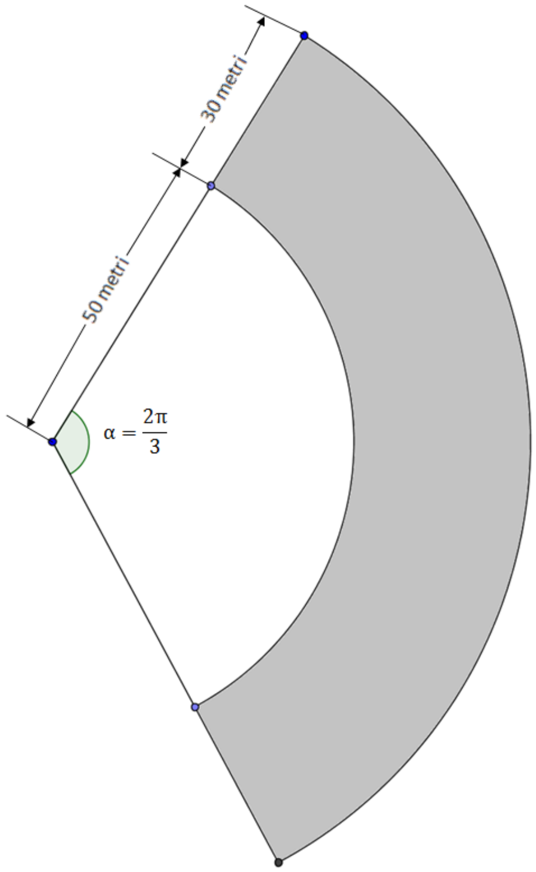


Figura 1

Tenendo presente che le normative di sicurezza emanate dal Comune prevedono un indice di affollamento massimo di 3,25 persone/m^2, e che il 9,5% della superficie della "Curva Nord" è inagibile in quanto necessita di lavori di manutenzione,

1) determina la capienza massima N_{max} attuale del settore "Curva Nord", approssimata alle centinaia.

La Polizia Municipale propone di aprire i cancelli di ingresso un'ora prima dell'inizio della manifestazione sportiva. È necessario non aprirli con troppo anticipo, per limitare i costi, ma anche evitare un afflusso troppo intenso, per motivi di sicurezza: la velocità massima di accesso degli spettatori non deve essere superiore a 350 ingressi al minuto. In base alle osservazioni degli anni precedenti, sai che l'andamento del numero di spettatori, aprendo gli ingressi un'ora prima dell'inizio della manifestazione, segue una curva come quella riportata in figura 2:

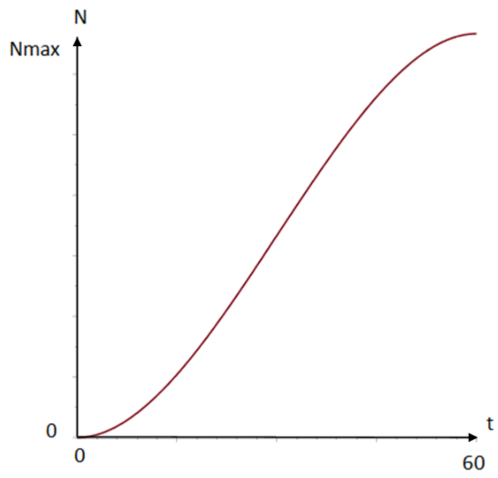


Figura 2

2) esprimendo il tempo *t* in minuti, determina il polinomio *p(t)* di terzo grado che meglio riproduce questo andamento, ipotizzando che il numero di spettatori sia 0 all'apertura dei cancelli di ingresso (t = 0) e sia pari al numero massimo consentito N_{max} dopo un'ora (*t = 60*), e che la velocità di accesso sia 0 al momento dell'apertura iniziale degli ingressi, e sia ancora 0 dopo un'ora, quando l'afflusso termina e il settore è riempito completamente. Verifica che la funzione rispetti il vincolo di sicurezza sulla massima velocità di accesso degli spettatori nello stadio.

Al termine della manifestazione gli spettatori defluiscono dall'impianto; in base alle osservazioni degli anni scorsi ogni minuto esce dall'impianto il 5% degli spettatori presenti all'interno nel minuto precedente.

3) Determina la funzione che meglio rappresenta il deflusso degli spettatori, e, indicando con t=0 l'apertura dei cancelli e t_c (da determinare) l'istante in cui, durante il deflusso, nell'impianto restano meno di 100 spettatori, disegna il grafico della funzione che rappresenta il numero di spettatori presenti nell'impianto nell'intervallo $[0; t_c]$; ipotizza che l'impianto sia riempito alla massima capienza e che la manifestazione sportiva duri un'ora. Determina inoltre la massima velocità di deflusso degli spettatori dall'impianto.

Devi organizzare i servizi di assistenza e ristoro per gli spettatori, sulla base del numero medio di presenze nell'impianto.

4) Determina il numero medio di spettatori presenti nell'impianto, nell'intervallo di tempo dall'istante $t = 0$ (apertura dei cancelli) all'istante $t = t_c$

SOLUZIONE MATEMATICA

Quesito 1:

L'area S della curva nord è data dall'espressione:

$$\mathbf{S = \frac{\alpha}{2}(R_2^2 - R_1^2) = \frac{2\pi}{6}(80^2 - 50^2) = 4084\ m^2}$$

L'area agibile $S_{eff.}$ è il 90,5% del totale e pertanto sarà $S_{eff.}$ = 3696 m^2

Il numero massimo di spettatori N_{max} sarà:

$$N_{\max} = 3{,}25 * S_{eff} = 12000$$

Quesito 2:

Indicando con N(t) il numero di spettatori all'interno dello stadio all'istante t espresso in minuti, risulta:

$$N(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$
$$N(t=0) = 0 \Rightarrow d = 0$$
$$\dot{N}(t=0) = 0 \Rightarrow 3at^2 + 2bt + c = 0 \Rightarrow c = 0$$
$$\dot{N}(t=60) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 60^2 + 2b \cdot 60 = 0 \Rightarrow a = -{}^{2b}\!/_{3 \cdot 60} = -\frac{b}{90}$$
$$N(t=60) = N_{\max} \Rightarrow a \cdot 60^3 + b \cdot 60^2 = N_{\max} \Rightarrow$$
$$\left(-\frac{b}{90} \cdot 60 + b\right) = \frac{N_{\max}}{60^2} \Rightarrow b = \frac{3 \cdot N_{\max}}{60^2} = 10 \quad \Rightarrow a = -\frac{1}{9}$$

quindi $N(t) = -\frac{1}{9}t^3 + 10t^2$

Verifichiamo che il flusso non superi il massimo consentito; per questo determiniamo il valore del massimo della derivata prima della funzione N(t):

$$\ddot{N}(t) = 6at + 2b = 0 \Rightarrow t = -{}^{b}\!/_{3a} = 30 \quad \min$$
$$\dot{N}(t=30) = 3a \cdot 30^2 + 2b \cdot 30 = 300 \ \ spettatori/\min$$

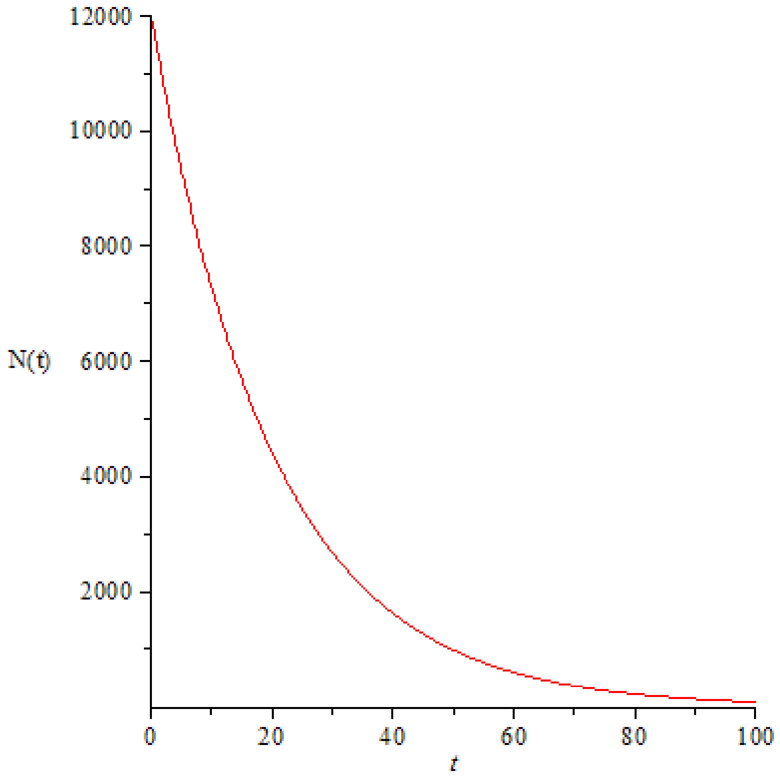
Il flusso quindi è minore del massimo possibile per motivi di sicurezza.

<u>Prima ipotesi soluzione quesito 3 e 4:</u>

Indichiamo con t_0 il tempo a cui la manifestazione termina e inizia il deflusso; questo è descritto dalla relazione:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -0{,}05 N(t) = -\frac{N(t)}{20} \Rightarrow N(t) = N_{\max} e^{-(t-t_0)/20}$$

Il grafico della funzione è il seguente:



Il valore di t_0 è t_0 = 120 minuti. Il tempo cercato t_c è:

$$N(t_c) = N_{\max} e^{-(t_c - t_0)/20} = 100 \Rightarrow t_c - t_0 = -20 \cdot \ln \frac{100}{N_{\max}} = 95{,}8\,\text{min} \Rightarrow t_c = 215{,}7\,\text{min}$$

Il deflusso ha il massimo all'inizio del deflusso stesso ed è pari al 5% del numero degli spettatori e quindi pari a 600 spettatori/minuto.

Il numero medio di spettatori nell'impianto è: $\overline{N} = \frac{1}{t_c} \int_0^{t_c} N(t)dt$

La funzione N(t) ha tre andamenti diversi negli intervalli (0,60); (60,120) e (120,216) minuti; pertanto:

$$\overline{N} = \frac{1}{t_c} \int_0^{t_c} N(t)dt = \frac{1}{t_c} \left(\int_0^{60} N(t)dt + \int_{60}^{120} N(t)dt + \int_{120}^{216} N(t)dt \right)$$

Nel primo intervallo $\int_0^{60} N(t)dt = \frac{a \cdot t^4}{4} + \frac{b \cdot t^3}{3} = 360000$

Nel secondo intervallo: $\int_{60}^{120} N(t)dt = N_{\max} * 60 = 720000$

Nel terzo infine: $\int_{120}^{216} N(t)dt = 20 \cdot N_{\max} \left(1 - e^{-96/20} \right) = 238025$

Il numero medio di spettatori sarà quindi:

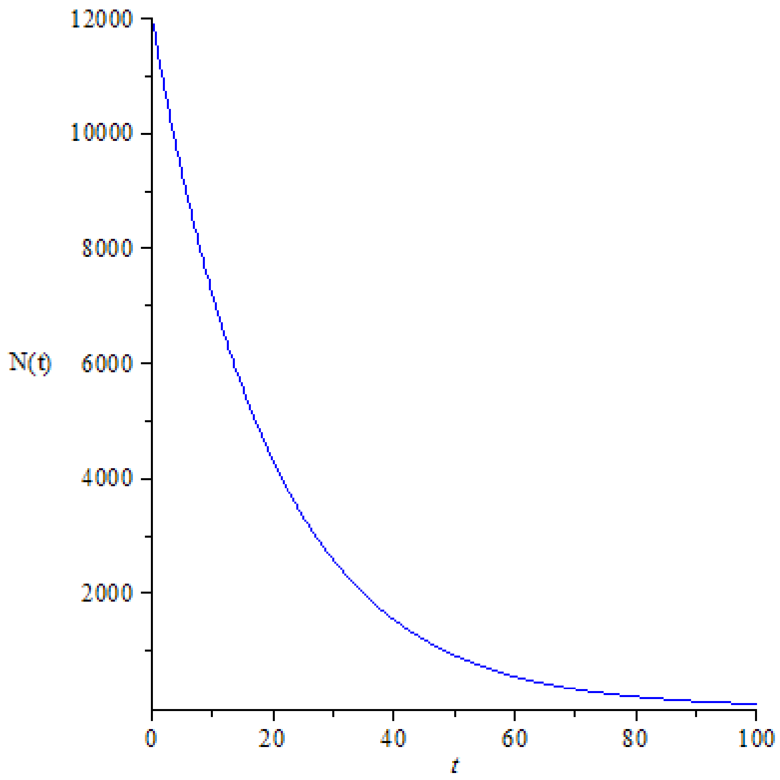
$$\overline{N} = \frac{1}{216}(360000 + 720000 + 238025) = 6102$$

<u>Seconda ipotesi soluzione quesito 3 e 4:</u>

Indicando con N_{max} il numero di spettatori presenti al termine della manifestazione, poiché in ogni minuto defluisce il 5% degli spettatori presenti un minuto prima, in ogni minuto il numero di spettatori ancora presenti all'interno dell'impianto è il 95% di quelli presenti un minuto prima.

Quindi $N(t_i) = N(t_{i-1}) \cdot 0{,}95$, e quindi $N(t_i) = N_{\max} \cdot 0{,}95^i$

Andamento della funzione $N(t) = 12000 \cdot 0{,}95^{t-t_0}$



Perché il numero di spettatori diventi inferiore a 100, devono trascorrere:

$$t_c.t_0 \geq \log_{0,95} \frac{100}{N_{\max}} = 93{,}3\,\text{min} \rightarrow t_c = 213{,}3\,\text{min}$$

Il numero medio di spettatori nell'impianto è: $\overline{N} = \frac{1}{t_c}\int_0^{t_c} N(t)dt$

La funzione N(t) ha tre andamenti diversi negli intervalli (0,60); (60,120) e (120,214) minuti; pertanto:

$$\overline{N} = \frac{1}{t_c}\int_0^{t_c} N(t)dt = \frac{1}{t_c}\left(\int_0^{60} N(t)dt + \int_{60}^{120} N(t)dt + \int_{120}^{214} N(t)dt\right)$$

Nel primo intervallo $\int_0^{60} N(t)dt = \frac{a \cdot t^4}{4} + \frac{b \cdot t^3}{3} = 360000$

Nel secondo intervallo: $\int_{60}^{120} N(t)dt = N_{\max} * 60 = 720000$

Nel terzo infine: $\int_{120}^{214} N(t)dt = \frac{N_{\max}}{\ln(0,95)}(0,95^{94} - 1) = 232064$

Il numero medio di spettatori sarà quindi:

$$\overline{N} = \frac{1}{214}(360000 + 720000 + 232064) = 6131$$

<u>Nota :</u> Modellizzando l'uscita degli spettatori con la funzione $N(t) = 12000 \cdot 0,95^{t-t_0}$ il numero medio risulta essere 6131 anziché 6102 che si ottiene con la funzione $N(t) = 12000 \cdot e^{-(t-t_0)/20}$, entrambe le curve sono sovrapponibili nell'andamento e le due soluzioni per $\overline{N}$ hanno uno scarto dello 0,47%

IL VASO

L'azienda in cui lavori produce articoli da giardino e sei stato incaricato di rivedere il disegno di un vaso portafiori realizzato da un tuo collega.
Il vaso formato, di altezza h= 18 cm, è composto da due tronchi di cono aventi la base maggiore in comune e il disegno che ti è stato fornito
(figura 1) ne rappresenta la sezione longitudinale:

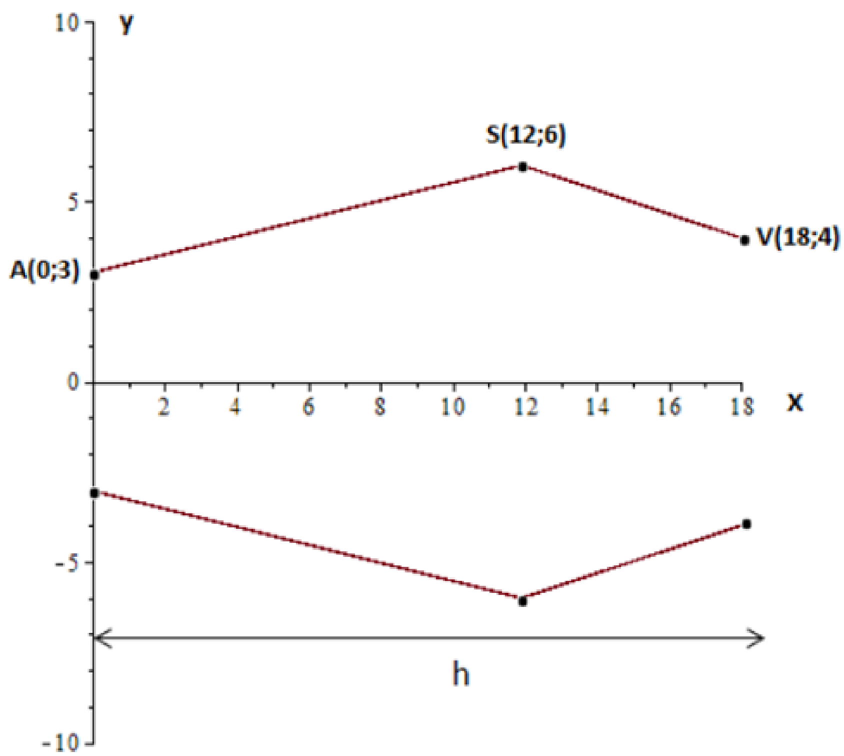


Figura 1

Nel riferimento cartesiano utilizzato in figura 1 l'unità di misura corrisponde a 1 cm. Il direttore del tuo reparto ti chiede di:

1) Verificare il valore del volume del vaso progettato dal tuo collega.

Se il volume risulta minore di 1,5 litri, bisogna rendere il vaso più alto, fino a fargli raggiungere il volume di 1,5 litri, lasciando però invariate le misure dei diametri

corrispondenti ai punti A, S e V, rendendo inoltre la forma meno spigolosa. Per chiarire meglio la sua richiesta, il direttore ti da un suo
disegno, modificato rispetto al precedente (figura 2)

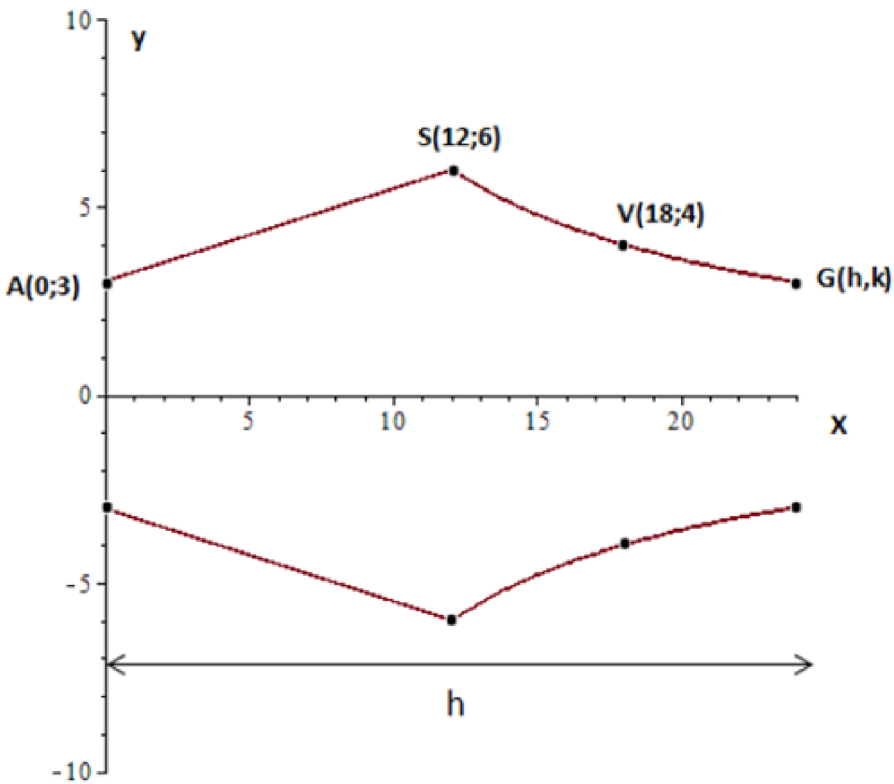


Figura 2

La curva passante per i punti S,V e G, disegnata dal direttore, può essere approssimata con un'iperbole di equazione y=a/x.

2)Determina, approssimando per eccesso al millimetro, i valori di h e k del punto G che consentono di soddisfare la richiesta di modifica del vaso.

Dopo che il primo esemplare del vaso è stato prodotto, il responsabile della produzione fa rilevare che l'eccessiva spigolosità del profilo nel punto S ne rende costosa la produzione.

3)Considera la funzione il cui grafico è rappresentato nella figura 2, nel semipiano $y \geq 0$; descrivi la natura del punto S giustificando le tue affermazioni;

4)Lasciando ancora invariate le misure dei diametri corrispondenti ai punti A ed S, individua la funzione razionale intera di secondo grado che consente di congiunge i punti A e S , eliminando il punto angoloso in S; disegna la nuova sagoma del vaso e individua il punto della curva AS in cui la pendenza del grafico è rimasta immutata rispetto alla sagoma precedentemente proposta.

Risoluzione

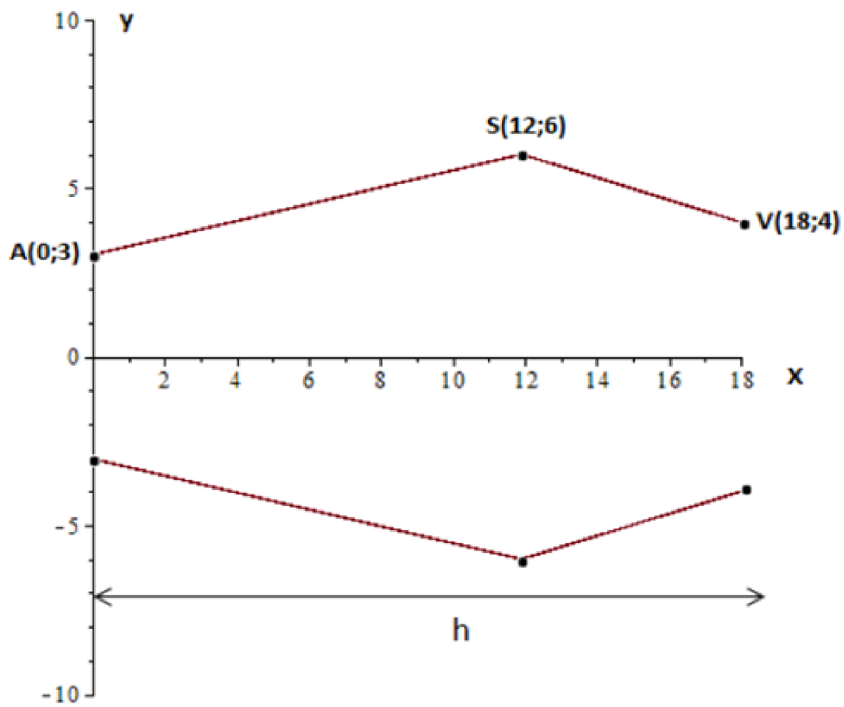


Fig1

PUNTO 1

1) Verificare il valore del volume del vaso progettato dal tuo collega.

Il vaso è formato da due tronchi di cono.

Per determinare il volume del vaso sommiamo il volume dei due tronchi calcolati separatamente.

Si possono usare due procedure :

Prima procedura con l'uso degli integrali

Equazione della retta per due punti:

$$\frac{y-yA}{yS-yA}=\frac{x-xA}{\mathrm{xS}-\mathrm{x}A}:$$

$$\frac{y-3}{6-3}=\frac{x}{12} \qquad \Rightarrow y=\frac{1}{4}x+3$$

Integrale per il calcolo del volume di un solido di rotazione $V=\pi\cdot\int_a^b f^2(x)\,dx$

$$V1:=\pi\cdot\int_0^{12}\left(\frac{1}{4}\cdot x+3\right)^2 dx=4\cdot\pi\int_0^{12}\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot x+3\right)^2 dx=4\cdot\pi\left[\frac{\left(\frac{1}{4}\cdot x+3\right)^3}{3}\right]_0^{12}=\frac{4\cdot\pi}{3}$$

$$\left[\left(\frac{1}{4}\cdot x+3\right)^3\right]_0^{12}=\frac{4}{3}\cdot\pi\left[\left(\frac{1}{4}\cdot 12+3\right)^3-\left(\frac{1}{4}\cdot 0+3\right)^3\right]=\frac{4}{3}\cdot\pi\left[(6)^3-(3)^3\right]=$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(216-27)=\frac{4}{3}\pi(189)=252\cdot\pi$$

$$\frac{y-yV}{yS-yV}=\frac{x-xV}{\mathrm{xS}-xV}:$$

$$\frac{y-4}{6-4}=\frac{x-18}{12-18} \qquad \Rightarrow y=-\frac{1}{3}x+10$$

$$V2:=\pi\cdot\int_{12}^{18}\left(-\frac{1}{3}\cdot x+10\right)^2 dx=-3\cdot\pi\int_{12}^{18}-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\cdot x+10\right)^2 dx=-3\cdot\pi\left[\frac{\left(-\frac{1}{3}\cdot x+10\right)^3}{3}\right]_{12}^{18}=-\pi$$

$$\left[\left(-\frac{1}{3}\cdot x+10\right)^3\right]_{12}^{18}=-\pi\left[\left(-\frac{1}{3}\cdot 18+10\right)^3-\left(-\frac{1}{3}\cdot 12+10\right)^3\right]=$$

$$=-\pi\left[(4)^3-(6)^3\right]=-\pi\cdot(64-216)=152\cdot\pi$$

$$V=V1+V2=404\,\pi\,cm^3=1269.2\,cm^3=1,27\ litri$$

Seconda procedura con l'uso della formula del volume del tronco di cono

Formula del volume del tronco di cono $V=\frac{1}{3}\pi h\left(R^2+R\,r+r^2\right)$

$$V1 = \frac{1}{3}\pi \cdot 12(36 + 6 \cdot 3 + 9) = 252\pi\, cm^3$$

$$V2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 6\,(36 + 6 \cdot 4 + 16) = 152\pi\, cm^3$$

$$V = V1 + V2 = 252\pi + 152\pi = 404\pi = 1269.2\, cm^3 = 1,27\ litri$$

$Volume < di\ 1,5\ litri$

PUNTO 2

2)Determina, approssimando per eccesso al millimetro, i valori di h e k del punto G che consentono di soddisfare la richiesta di modifica del vaso.

F

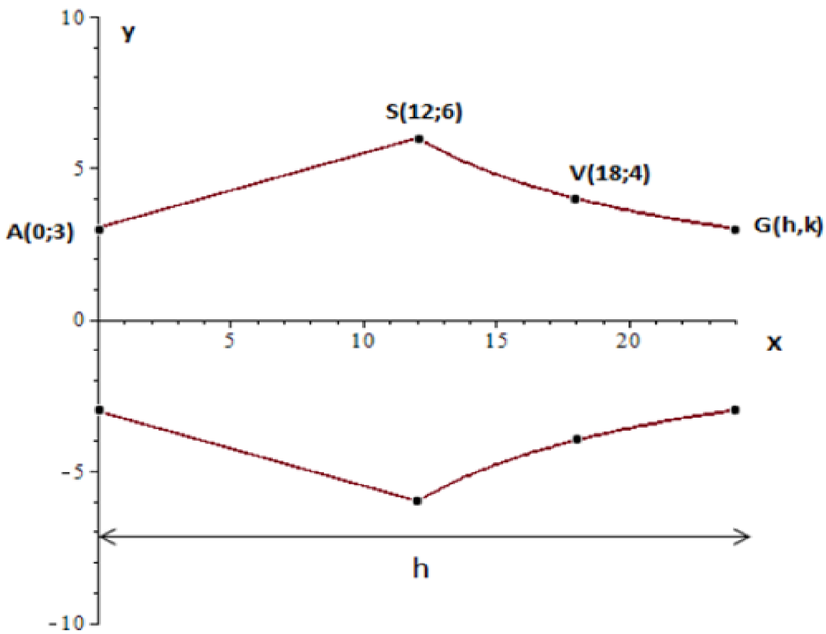


Figura 2

Innanzitutto occorre determinare l'equazione dell'iperbole equilatera , a tale scopo consideriamo la condizione di appartenenza del punto S(12,6)

alla curva e sostituiamo le coordinate di S all'equazione $y = \frac{a}{x}$

$$6 = \frac{a}{12} \quad \Rightarrow a = 72 \qquad \Rightarrow \quad y = \frac{72}{x}$$

Per ottenere un vaso di capacità approssimativamente uguale a 1,5 litri il collo deve essere allungato e la nuova altezza sarà l'ascissa di G .

cm^3 il volume finale del nuovo vaso $V_f = V1 + V3$

$1500\ cm^3 = V1 + V3$ dove $V1$ è il volume del tronco di cono già determinato al punto 1

$$V1 := \int_0^{12} \left(\frac{1}{4} \cdot x + 3 \right)^2 \cdot \pi\, dx = 252\,\pi = 791.7\ cm^3$$

mentre V3 si può calcolare con il seguente integrale definito:

$$V3 = \pi \int_{12}^{h} \left(\frac{72}{x} \right)^2 dx = \pi \int_{12}^{h} \frac{5184}{(x)^2}\, dx =$$

$$V3 = 5184\,\pi \cdot \int_{12}^{h} \frac{1}{x^2}\, dx = 5184\,\pi \left[-\frac{1}{x} \right]_{12}^{h} = 5184\,\pi \cdot \left[-\frac{1}{h} + \frac{1}{12} \right] = \pi \left(\frac{-5184}{h} + 432 \right)$$

Impostiamo l'equazione per ricavare h

$$252 \cdot \pi + \pi \left(\frac{-5184}{h} + 432 \right) = 1500$$

$$252 \cdot \pi - \frac{5184\,\pi}{h} + 432 \cdot \pi = 1500;$$

$$\frac{5184\,\pi}{h} = 684 \cdot \pi - 1500;$$

$$h = \frac{5184\,\pi}{684 \cdot \pi - 1500} = \frac{432\,\pi}{57\,\pi - 125} = 25.1\ cm$$

$h = 25.1\ cm$ è la nuova altezza del vaso approssimata al millimetro e le coordinate di G sono

h= 25.1 e k $= \frac{72}{25.1} = 2.9$

Il punto G che soddisfa alla richiesta di modifica ha coordinate G(25.1;2.9)

PUNTO 3

3)Considera la funzione il cui grafico è rappresentato nella figura 2, nel semipiano $y \geq 0$; descrivi la natura del punto S giustificando le tue affermazioni;

Abbiamo precedentemente ricavato che la retta passante per A ed S ha equazione
$y=\frac{1}{4}x+3$, mentre la curva

tra i punti S e G è l'iperbole equilatera di equazione y=$\frac{72}{x}$

Il contorno del vaso descritto in figura 2 è rappresentato nel semipiano non negativo delle y dalla funzione definita nell'intevallo [0,25.1]

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}x+3 & 0 \le x < 12 \\ \frac{72}{x} & 12 \le x \le 25.1 \end{cases}$$

Tale funzione è continua in S(12,6) in quanto $\lim_{x \to 12^-} \frac{1}{4}x+3 = \lim_{x \to 12^+} \frac{72}{x} = 6$

Verifichiamo se è derivabile. A tale scopo calcoliamo la derivata prima di f(x) essa è data da

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{4} & 0 \le x < 12 \\ -\frac{72}{x^2} & 12 < x \le 25.1 \end{cases}$$

per verificare se f(x) è derivabile nel punto S consideriamo $\lim_{x \to 12^-} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ e

$\lim_{x \to 12^+} -\frac{72}{x^2} = -\frac{1}{2}$ Poichè la derivata destra e sinistra nel punto S esistono finite ma diverse , possiamo concludere che il punto S è un punto angoloso.

Punto 4

4)Lasciando ancora invariate le misure dei diametri corrispondenti ai punti A ed S, individua la funzione razionale intera di secondo grado che consente di congiunge i punti A e S , eliminando il punto angoloso in S; disegna la nuova sagoma del vaso e individua il punto della curva AS in cui la pendenza del grafico è rimasta immutata rispetto alla sagoma precedentemente proposta.

La forma generale di una funzione razionale intera di secondo grado è

$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$

Per determinare i parametri a,b,c consideriamo l' appartenenza dei punti A(0,3) ed S(12, 6) e la richiesta che il punto S non sia un punto angoloso.
Perchè quest'ultima condizione sia verificata occorre che la derivata prima della funzione razionale intera e quella dell'iperbole, calcolate
nel punto S, siano uguali , cioè che le due curve nel punto S siano tangenti alla stessa retta.
Quindi se consideriamo $y' = 2\cdot a\cdot x + b$ e $y' = -\frac{72}{x^2}$ in S si ha : $2\cdot a\cdot 12 + b = -\frac{72}{12^2}$

Impostiamo il sistema con le tre condizioni e lo risolviamo.

$$\begin{cases} 24\cdot a + b = -\frac{1}{2} \\ 3 = a\cdot 0 + b\cdot 0 + c \\ 6 = a\cdot 144 + b\cdot 12 + c \end{cases} ; \begin{cases} \frac{-48\cdot a - 1}{2} = b \\ c = 3 \\ 6 = a\cdot 144 + \frac{-48\cdot a - 1}{2}\cdot 12 + 3 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} \frac{-48\cdot a - 1}{2} = b \\ c = 3 \\ 6 = a\cdot 144 + (-48\cdot a - 1)\cdot 6 + 3 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} \frac{-48\cdot a - 1}{2} = b \\ c = 3 \\ 6 = a\cdot 144 - 288\cdot a - 6 + 3 \end{cases} ; \begin{cases} \frac{-48\cdot a - 1}{2} = b \\ c = 3 \\ a\cdot 144 = -9 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} \frac{3 - 1}{2} = b \\ c = 3 \\ a = -\frac{1}{16} \end{cases} ; \begin{cases} b = 1 \\ c = 3 \\ a = -\frac{1}{16} \end{cases}$$

La funzione razionale intera di secondo grado richiesta ha equazione :
$y = -\frac{1}{16}\cdot x^2 + x + 3$ ed è definita nell'intervallo in [0,12]
L'equazione della curva che rappresenta la nuova sagoma del vaso nell'intervallo [0,25.1] è

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{16} \cdot x^2 + x + 3 \;\; per \quad 0 \le \mathrm{x} < 12 \\ \frac{72}{\mathrm{x}} \quad\quad 12 \le x \le 25.1 \end{cases}$$

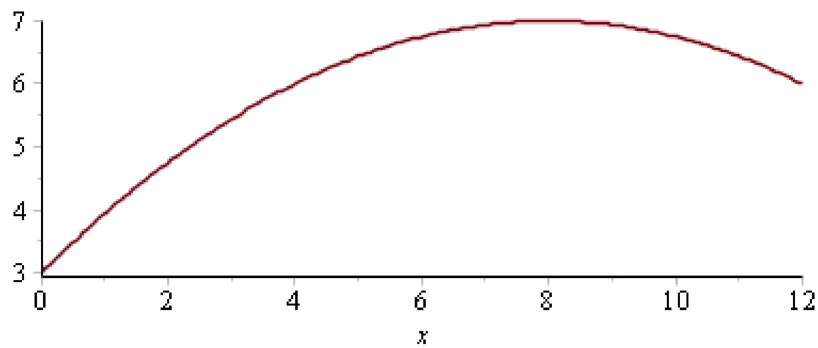
È una funzione definita per casi il cui Dominio è $[0; 25.1]$

Il grafico di tale funzione è definito :

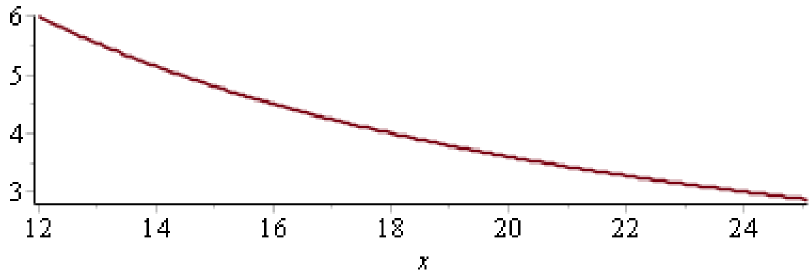
1) dall'arcol di parabola con la concavità verso il verso negativo delle y, compresa tra punti A ed S e avente il vertice (punto di massimo per la curva)

nel punto la cui ascissa che rende nulla la derivata prima $-\frac{2}{16}x + 1 = 0 \quad \Rightarrow x = 8$

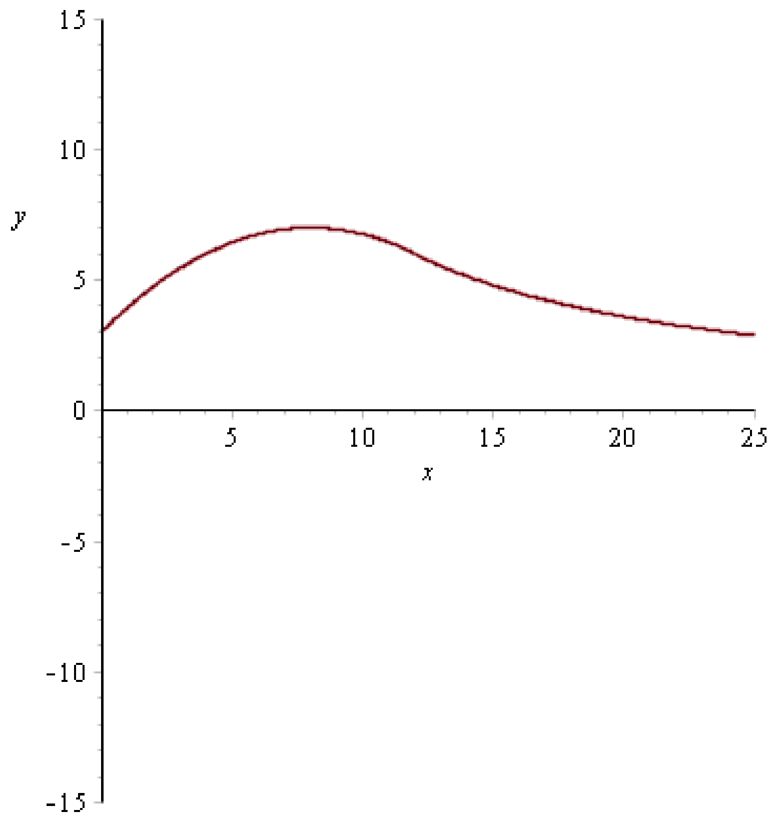
$y = -\frac{1}{16} \cdot 64 + 8 + 3 = 7$; $V(8, 7)$



2) dall'arco di iperbole equilatera compresa tra i punti S e G



Unendo i due archi la funzione ha il seguente grafico



La curva simetrica rispetto all'asse delle ascisse si ottiene applicando le equazioni della simmetria ripetto all'asse x :

$$\begin{cases} X = x \\ Y = -y \end{cases}$$

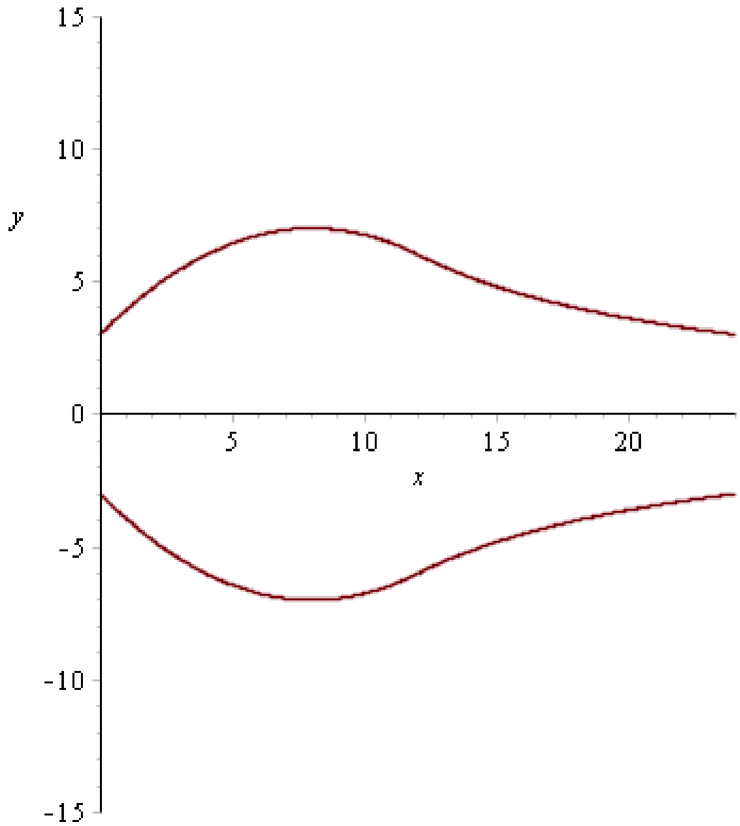
sostituendo si ha

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{16} \cdot x^2 - x - 3 \; per & 0 \le x < 12 \\ -\frac{72}{x} & 12 \le x \le 25.1 \end{cases}$$

La sagoma del vaso è rappresentata dalla parte di piano delimitata dalle due funzioni

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{16} \cdot x^2 + x + 3 \; per & 0 \le x < 12 \\ \frac{72}{x} & 12 \le x \le 25.1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{16} \cdot x^2 - x - 3 \; per & 0 \le x < 12 \\ -\frac{72}{x} & 12 \le x \le 25.1 \end{cases}$$



Infine per individuare il punto della curva AS in cui la pendenza del grafico è rimasta immutata rispetto alla sagoma precedentemente proposta
utlizziamo il teorema di Lagrange .
Sappiamo che la pendenza della sagoma della figura 2 è data dal coefficiente angolare della retta A S

$$\frac{6-3}{12-0}=\frac{1}{4}$$

La funzione razionale intera y=$-\frac{1}{16}\cdot x^2+x+3$ essendo una funzione polinomiale è definita, continua e derivabile in $\Re$, e quindi soddisfa
nell'intervallo [0,12] alle ipotesi del teorema di Lagrange, pertanto esiste un punto c appartenente all'intervallo]0,12[, che ne verifica la tesi

$$f'(c)=\frac{f(12)-f(0)}{12-0}=\frac{6-3}{12-0}=\frac{1}{4}$$

cioè esiste un punto c appartenente all'intervallo]0,12[in cui $f'(c)$ è uguale alla pendenza della retta AS $\Rightarrow$

$$-\frac{2}{16}\cdot c+1=\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{8}\cdot c+1=\frac{1}{4} \Rightarrow c-8=-2 \Rightarrow c=6$$

$$f(6)=-\frac{1}{16}\cdot 36+6+3=-\frac{9}{4}+9=\frac{27}{4}$$

Nel punto di coordinate $\left(6, \frac{27}{4}\right)$ la tangente alla curva $y=-\frac{1}{16}\cdot x^2+x+3$ ha lo stesso coefficiente angolare della retta AS (vedi figura 3)

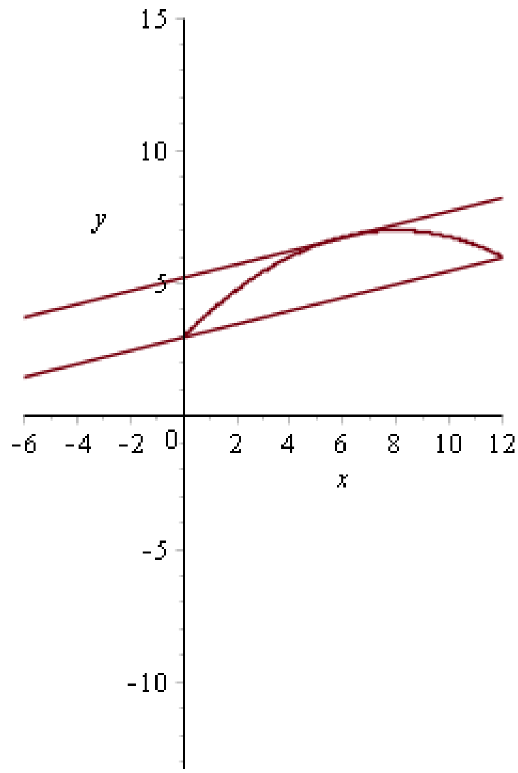


figura 3

QUESITO 1

Assegnata la funzione

$y = e^{x^3 - 8}$

1) verificare che è invertibile
2) stabilire se la funzione inversa f^{-1} è derivabile in ogni punto del suo dominio di definizione, giustificando la risposta

Soluzione quesito 1

Per verificare che la funzione sia invertibile occorre dimostrare che in $\Re$ è biunivoca.
La funzione y è una funzione esponenziale con la base >1 quindi è definita , continua e derivabile per ogni x appartenente ad $\Re$ ed è strettamente crescente in $\Re$, e come tutte le funzioni monotone strettamente crescenti è biunivoca, quindi invertibile . Il suo codominio è $]0,+\infty[$

(Oppure per dimostrare che la funzione y è monotona crescente calcoliamo la derivata prima:

$\frac{d}{dx} y(x) = 3x^2 e^{x^3 - 8}$

Risolviamo la disequazione $3x^2 e^{x^3 - 8} \geq 0$, essendo un prodotto di funzioni non negative è verificata $\forall x \in \Re$, pertanto la funzione y è monotona sempre crescente in $\Re$ e quindi invertibile.)
Ricaviamo la sua inversa:

$y = e^{x^3 - 8} \Rightarrow x^3 - 8 = \ln y \Rightarrow x^3 = \ln y + 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\ln y + 8}$ definita in $]0,+\infty[$, effettuando la sostituzione di variabile la funzione inversa ha equazione:

$y = \sqrt[3]{\ln x + 8}$ e la sua derivata è

$y = \dfrac{1}{3 \cdot x \cdot \sqrt[3]{(\ln(x) + 8)^2}}$ la funzione risulta perciò derivabile per $x>0$ e $x \neq e^{-8}$.

QUESITO 2

Data l'equazione differenziale del primo ordine $y' = \dfrac{1}{2x - 1}$ determinare la soluzione del problema di Cauchy, tenendo conto della condizione iniziale $y(1) = 0$

Soluzione quesito 2

L'equazione è una equazione differenziale a variabili separabili.
Risolvere l'equazione $y' = \dfrac{1}{2x - 1}$ significa trovare la funzione *y(x)* che insieme alla sua derivata prima soddisfa l'equazione data . Per trovare *y(x)* scriviamo la derivata prima y' nella forma differenziale

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x-1}$, separiamo le variabili $dy = \left(\frac{1}{2x-1}\right) \cdot dx$

e consideriamo l'integrale indefinito di ambo i membri $\int dy = \int \frac{dx}{2x-1}$ quindi

se nel secondo integrale moltiplichiamo e dividiamo per 2 si ha: $\int dy = 2 \cdot \int \frac{1}{2} \frac{dx}{2 \cdot x - 1}$.

Risolvendo i due integrali immediati si ha: $y(x) = \frac{1}{2} \ln|2 \cdot x - 1| + k$.

Infine sostituendo la condizione iniziale si trova il valore di k :

$0 = \frac{1}{2} \ln|2 \cdot 1 - 1| + \boldsymbol{k} \Rightarrow \mathbf{0} = \frac{1}{2} \ln|1| + k \Rightarrow \mathbf{0} = \frac{1}{2} \cdot 0 + k \Rightarrow \boldsymbol{k} = \mathbf{0}$

La soluzione del problema è y= $\frac{1}{2} \ln(2x-1)$ che rappresenta l'equazione di una funzione logaritmica passante per il punto (1,0)

QUESITO 3

Di quale delle seguenti equazioni differenziali è soluzione la funzione $y = \ln(x-3)$?

a) $(x-3) \cdot y'' - (x-3)^2 \cdot y' + 2 = 0$

b) $x \cdot y'' - (x-3) \cdot y' + x + 2 = 0$

c) $(x-3)^2 \cdot y'' - (x-3) \cdot y' + 2 = 0$

d) $x^2 \cdot y'' + y' + 3 \cdot x - 9 = 0$

Giustifica la risposta

Soluzione quesito 3

La risposta corretta è la c.

Giustificazione

Le equazioni proposte sono equazioni differenziali del secondo ordine. La funzione y=ln(x-3) è definita, continua e derivabile per x>3

Per verificare di quale equazione differenziale è soluzione la funzione y=ln(x-3), per x>3 bisogna calcolare la derivata prima e la derivata seconda della funzione y=ln(x-3) e sostituirle nelle equazioni differenziali proposte . L'equazione che risulterà soddisfatta sarà quella richiesta.

Svolgimento:

$y' = \frac{1}{x-3}$, $y'' = -\frac{1}{(x-3)^2}$

Sostituendo in ciascuna delle equazioni differenziali proposte , l'unica verificata è la c infatti :

$(x-3)^2 \cdot \left(-\frac{1}{(x-3)^2}\right) - (x-3) \cdot \frac{1}{x-3} + 2 = 0$

$$(\cancel{x-3})^{2}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{(x-3)^2}_{1}}\right)-(\cancel{x-3})\cdot\frac{1}{\cancel{x-3}_{1}}+2=0$$

-1-1+2=0 $\rightarrow$ 0=0

QUESITO 4

Verificare il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+7n+12}$ e, nel caso in cui sia convergente, determinare la sua somma.

Soluzione quesito 4

Per verificare che la serie è convergente, utilizzando la definizione, basta verificare che la successione delle sue ridotte , per n$\rightarrow +\infty$, è convergente.

A tale scopo consideriamo il termine generale della successione $a_n = \frac{1}{n^2+7n+12}$

Scomponiamo il denominatore della successione a_n
e individuiamo le frazioni la cui somma è uguale ad a_n

$a_n = \frac{1}{(n+3)(n+4)} \Rightarrow \quad a_n = \left(\frac{A}{n+3} + \frac{B}{n+4}\right) \quad a_n = \left(\frac{An + 4A + Bn + 3B}{(n+3)\,(n+4)}\right)$ mettiamo in evidenza

$a_n = \left(\frac{(A+B)\,n + 4A + 3B}{(n+3)\,(n+4)}\right)$. Utilizzando il principio di identità dei polinomi impostiamo il seguente sistema :

$\begin{cases} A+B=0 \\ -4B+3B=1 \end{cases}$; $\begin{cases} A=-B \\ B=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$ $\quad a_n = \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right)$ sostituiamo nella serie data

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+7n+12} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right)$ consideriamo la somma dei primi n termini della successione

$s_n = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \ldots \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right)$: eliminando i termini opposti

$s_n = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+4}\right)$: calcoliamo il limite per n $\rightarrow +\infty$ di s_n poiché, per $n \rightarrow \infty$ $\frac{1}{n+4}$ *tende a zero* si ha che :

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+4}\right) = \frac{1}{3}$. Poiché il limite è finito la serie è convergente e la sua somma è 1/3.

QUESITO 5

Per progettare un sito Web è necessario generare dei codici unici di accesso. Per fare questo si vogliono utilizzare due lettere maiuscole dell'alfabeto inglese seguite da una serie di numeri compresi tra 0 e 9. Tutti i codici di accesso dovranno avere lo stesso numero di cifre ed è ammessa la ripetizione di lettere e numeri. Qual è il numero minimo di cifre da impostare in modo da riuscire a generare almeno 5 milioni di codici di accesso diversi? Giustificare la risposta .

Soluzione quesito 5

Se indichiamo con $D_{k,h}^{R}$ *le disposizioni con ripetizione di k elementi ad h ad h*

Il numero di codici che può essere generato con due lettere e un numero è dato da :
$D_{26,2}^{R} \cdot 10 = 26^2 \cdot 10 = 6760$
Con due lettere e due numeri : $D_{26,2}^{R} \cdot D_{10,2}^{R} = 26^2 \cdot 10^2 = 67600$
Con due lettere e n numeri : $D_{26,2}^{R} \cdot D_{10,n}^{R} = 26^2 \cdot (10)^n = 676 \cdot 10^n$
Per poter generare almeno 5 milioni di login dovrà risultare:
$676 \cdot (10)^n > 5 \cdot 10^6$
ovvero
$n > Log\left(\frac{5 \cdot 10^6}{676}\right)$
dove
$Log\left(\frac{5 \cdot 10^6}{676}\right) \approx 3.8690$
Per generare almeno 5 milioni di login sarà necessario impostare codici con 2 lettere e 4 numeri.

QUESITO 6

La base di un solido, nel piano Oxy, è il cerchio avente come centro l'origine e raggio 3. Le sezioni del solido perpendicolari alla sua base sono quadrati.
Calcolare il volume del solido.

Soluzione quesito 6

L'equazione della circonferenza γ, base del solido, è : $x^2 + y^2 = 9$
Un piano perpendicolare al piano di base del solido e secante alla circonferenza γ nei suoi punti di ascissa x (con $-3 \le x \le 3$), intercetta su γ una corda di lunghezza $2 \cdot \sqrt{9 - x^2}$

Il quadrato sezione ha area $4 \cdot (9 - x^2)$ e il volume del solido è dato da: $\int_{-3}^{3} 4 \cdot (9 - x^2)\, dx =$

$$= \left[36 \cdot x - \frac{4 \cdot x^3}{3}\right]_{-3}^{3} = \left[36 \cdot 3 - 4 \cdot \frac{27}{3} - 36 \cdot (-3) + 4 \cdot \frac{(-27)}{3}\right] = \left[108 - \frac{108}{3} + 108 - \cdot \frac{108}{3}\right] = \left[216 - \frac{216}{3}\right]$$
$$= \frac{648 - 216}{3} = \frac{432}{3} = 144$$

QUESITO 7

Trovare l'equazione del piano tangente alla sfera avente come centro l'origine e raggio 2, nel suo punto di coordinate (1,1,z) con z negativa.

Soluzione quesito 7

La sfera avente come centro l'origine e raggio 2, ha equazione: $x^2+y^2+z^2=4$.

Il punto in cui va trovato il piano π tangente alla sfera, ha coordinata z data da: $1+1+z^2=4$, equazione che ha soluzioni: $z=\pm\sqrt{2}$.
Poichè la richiesta è che la coordinata z sia negativa, il punto per il quale deve passare il piano π è $P\left(1,1,-\sqrt{2}\right)$.

Il piano π passa per P ed è perpendicolare alla retta *r* per O e P , essendo O (origine del sistema di riferimento) il centro della sfera.

L'equazione del piano π passante per il punto P può essere scritta come:
$a\cdot(x-1)+b\cdot(y-1)+c\cdot\left(z+\sqrt{2}\right)=0$ dove (a, b, c) sono componenti di un vettore giacitura per il piano π.
La retta *r* passante per P e perpendicolare a π ha dunque vettore direzione parallelo al vettore giacitura di π; l'equazione di *r* sarà:

$$\frac{x-xP}{a}=\frac{y-yP}{b}=\frac{z-zP}{c}$$

sostituendo le coordinate di O e di P si trova:

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=-\frac{\sqrt{2}}{c}$$

ovvero:

$$a=b=-\frac{c}{\sqrt{2}}$$

e dunque sostituendo all'equazione del piano si ha :

$-\frac{c}{\sqrt{2}}(x-1)-\frac{c}{\sqrt{2}}(y-1)+\mathrm{c}\cdot\left(z+\sqrt{2}\right)=0$, supposto c≠0 , dividendo per c e moltiplicando per $-\sqrt{2}$ si ha $\mathrm{x}-1+\mathrm{y}-1-\sqrt{2}\left(z+\sqrt{2}\right)=0$

ovvero: $x+y-\sqrt{2}\cdot z-4=0$.

QUESITO 8

Risolvere il seguente integrale indefinito $\int (\arcsin(x) + \arccos(x))\, dx$

e rappresentare graficamente la funzione primitiva passante per il punto $\left(\frac{2}{\pi}, 2\right)$.

Soluzione quesito 8

$\int (\arcsin(x) + \arccos(x))\, dx$ posto y= arcsin(x)   →x=sin (y) e posto t= arccos(x)   →x=cos (t) ; sapendo che il codominio dell'arcsin(x) è $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e che il codominio dell'arccos(x) è $[0, \pi]$, gli unici angoli che in tali insiemi hanno il valore del seno uguale a quello del coseno sono, per le proprietà degli archi associati, gli angoli complementari, cioè angoli la cui somma è un angolo retto.
Quindi se consideriamo la somma $(\arcsin(x) + \arccos(x))$, essa è sempre costante essendo .

$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{1}{2}\pi$.

Calcolare $\int (\arcsin(x) + \arccos(x))\, dx$ equivale a calcolare $\int \frac{\pi}{2}\, dx$, pertanto

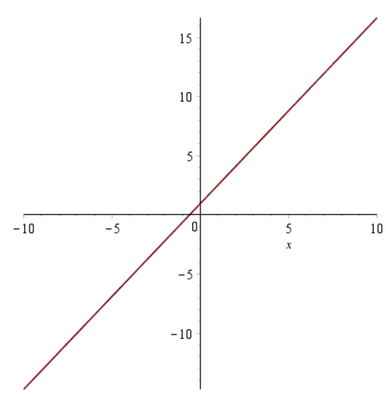
$$\int (\arcsin(x) + \arccos(x))\, dx = \int \frac{\pi}{2}\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot x + c$$

Per determinare c sostituiamo il punto $\left(\frac{2}{\pi}, 2\right)$ alla funzione $y = \frac{\pi}{2} \cdot x + c$

$2 = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{2}{\pi} + c$ → 2= 1+ c →   c=1

$$y = \frac{1}{2}\pi x + 1$$

La primitiva ottenuta è una retta passante per il punto $\left(\frac{2}{\pi}, 2\right)$ e avente coefficiente angolare m= $\frac{1}{2}\pi$



QUESITO 9

Calcolare il seguente integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\cdot\ln^2(x)}\,dx$

Soluzione quesito 9

Per risolvere l'integrale occorre modificare l'estremo di integrazione e verificare il comportamento al limite quando l'estremo tende ad infinito.

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\cdot\ln^2(x)}\,dx = \lim_{k\to+\infty} \int_2^{k} \frac{1}{x\cdot\ln^2(x)}\,dx \quad = \qquad \text{posto } \ln(x)=t \Rightarrow \text{ che } x=e^t \text{ e } dx=e^t\cdot dt$$

da cui sostituendo

$$\lim_{k\to+\infty} \int_2^{k} \frac{1}{x\cdot\ln^2(x)}\,dx = \lim_{k\to+\infty} \int_{\ln(2)}^{\ln(k)} \frac{1}{e^t\cdot t^2}\,e^t\,dt = \lim_{k\to+\infty} \int_{\ln(2)}^{\ln(k)} t^{-2}\,dt =$$

$$\lim_{k\to+\infty}\left[-\frac{1}{\ln(k)}+\frac{1}{\ln(2)}\right] = 0+\frac{1}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)}$$

QUESITO 10

In una stazione ferroviaria, fra le 8 e le 10 del mattino arrivano in media ogni 20 minuti 2 treni .
Determina la probabilità che in 20 minuti :
a) non arrivi nessun treno
b) ne arrivi uno solo
c) al massimo ne arrivino 4

Soluzione quesito 10

Sappiamo che in media ogni 20 minuti arrivano 2 treni, quindi *la media è* $\lambda=2$

Per la risoluzione del problema possiamo applicare in tutti e tre casi la distribuzione di probabilità di Poisson secondo cui la probabilità che l'evento si verifichi è data dalla relazione:

$P=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ e nel nostro caso essendo $\lambda=2$ $P=\dfrac{e^{-2}2^k}{k!}$

Caso a) k=0 $P=\dfrac{e^{-2}2^0}{0!}$, sappiamo che per convenzione $0!=1$ quindi $P=e^{-2} \approx 0.14$

Caso b) k=1 $P=\dfrac{e^{-2}2^1}{1!}$, quindi $P=2\,e^{-2} \approx 0.27$

Caso c) $k\le 4$ $P=P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)=$

$$\frac{e^{-2}2^0}{0!}+\frac{e^{-2}2^1}{1!}+\frac{e^{-2}2^2}{2!}+\frac{e^{-2}2^3}{3!}+\frac{e^{-2}2^4}{4!}=$$

$$e^{-2}+2e^{-2}+2e^{-2}+\frac{4}{3}e^{-2}+\frac{2}{3}e^{-2}=$$

$$=e^{-2}\left(1+2+2+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right)=e^{-2}\left(\frac{3+6+6+4+2}{3}\right)=7\cdot e^{-2}\approx 0.94738$$