SISTEMI LINEARI

Definizioni generali

Una equazione di primo grado si chiama **equazione lineare**, pertanto si chiama **sistema lineare** un sistema costituito da equazioni di primo grado.

Esempio:

sistema lineare	sistema non lineare (di 2° grado)
$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 2x-y+6=0 \end{cases}$	$\begin{cases} y=x^2-2x \\ 2x-3y=1 \end{cases}$

Un sistema si dice in **forma normale** se è scritto nella forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

sistema di m equazioni in n incognite
dove le x_i sono le **incognite**,
i b_i sono **i termini noti**
e gli a_{ik} sono i **coefficienti** delle equazioni del sistema

Se tutti i termini noti b_i sono uguali a zero il sistema si dice **omogeneo.**

Esempio:

sistema lineare di 2 equazioni in 3 incognite scritto in **forma normale**	$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=4 \\ 2x_1-x_2+2x_3=3 \end{cases}$
sistema lineare **omogeneo** di 2 equazioni in 2 incognite	$\begin{cases} 3x_1+x_2=0 \\ 2x_1-5x_2=0 \end{cases}$

Il sistema può essere rappresentato in **forma matriciale**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots & a_{2n} \\ .. & .. & \dots\dots & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ .. \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{bmatrix}$$

Dove:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ .. & .. & \ldots\ldots & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ matrice di ordine m,n è la **matrice dei coefficienti**

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ .. \\ x_n \end{bmatrix}$$ vettore colonna di ordine $n,1$ è la **matrice delle incognite**

$$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{bmatrix}$$ vettore colonna di ordine $m,1$ è la **matrice delle incognite**

e le tre matrici A, X e B sono legate dalla operazione matriciale:

$A \cdot X = B$ (prodotto tra matrici)

Esempio:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

infatti se eseguiamo la moltiplicazione al primo membro otteniamo

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + (-1)\cdot x_3 \\ 2\cdot x_1 + (-1)\cdot x_2 + 2\cdot x_3 \end{bmatrix}$$

e le due matrici $\begin{bmatrix} 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + (-1)\cdot x_3 \\ 2\cdot x_1 + (-1)\cdot x_2 + 2\cdot x_3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ sono uguali

Un sistema lineare è

Impossibile se non ammette soluzione

Possibile se esiste almeno una n-pla di valori x_i che soddisfa le equazioni

un **sistema possibile** è

Determinato se esiste **una e una sola** n-pla di valori x_i che soddisfa le equazioni

Indeterminato se esistono **infinite** n-ple di valori x_i che soddisfano le equazioni

Esempio:

Il sistema $\begin{cases} x+y=4 \\ x+y=1 \end{cases}$ è **impossibile** perché non esistono due numeri che sommati diano due risultati diversi.

Il sistema $\begin{cases} x+y=8 \\ x-y=2 \end{cases}$ è **possibile** e **determinato**. La coppia di valori $x = 5$ e $y = 3$ è l'unica che soddisfa entrambe le equazioni.

Il sistema $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+4y=8 \end{cases}$ è **possibile** ma **indeterminato** perché esistono più coppie di valori x, y che soddisfano entrambe le equazioni: $x = 0$ e $y = 2$ ma anche $x = 2$ e $y = 1$ oppure $x = 4$ e $y = 0$ o $x = 6$ e $y = -1$, $x = -2$ e $y = 3$, $x = 1$ e $y = 3/2$ ….

Sistemi *n*-*n*

Consideriamo un sistema formato da ***n* equazioni** in ***n* incognite**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

se lo rappresentiamo in forma matriciale otteniamo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots & a_{2n} \\ .. & .. & \dots\dots & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_n \end{bmatrix}$$

$A \cdot X = B$ con:

A matrice quadrata di ordine n

X vettore colonna di ordine $n,1$

B vettore colonna di ordine $n,1$

Un sistema di *n* equazioni in *n* incognite è determinato se e solo se det$A$ ≠ 0

Metodi risolutivi

Un sistema lineare può essere risolto in **5 modi**:

a) Con il metodo della **sostituzione**
b) Con il metodo del **confronto**

c) Con il metodo di **riduzione**
d) Con la **regola di Cramer**
e) Con il metodo della **matrice inversa**

Spieghiamo brevemente questi metodi risolutivi servendoci di un esempio:

considero il sistema $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$, poiché $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$ il sistema è determinato.

Risolvo il sistema utilizzando i 5 metodi

a) Metodo della sostituzione

Risolvo una delle due equazioni rispetto a una delle incognite e poi sostituisco quanto trovato nell'altra equazione che, in questo modo, diventa una equazione di primo grado ad una incognita sola.

$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases} \longrightarrow$ risolvo la prima equazione rispetto a y $\longrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$

sostituisco nella seconda equazione $\longrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 3x + 2(2x - 1) = 12 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 3x + 4x - 2 = 12 \end{cases}$

$\longrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 7x = 14 \end{cases}$ sostituisco il valore di x trovato nella prima equazione per trovare il valore di y $\longrightarrow \begin{cases} y = 2(2) - 1 = 3 \\ x = 2 \end{cases}$

$\longrightarrow$ la soluzione del sistema è $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

b) Metodo del confronto

Risolvo le due equazioni rispetto a una delle incognite e poi uguaglio quanto trovato ottenendo, in questo modo, una equazione di primo grado ad una incognita sola.

$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases} \longrightarrow$ risolvo le due equazioni rispetto a y $\longrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = \dfrac{12 - 3x}{2} \end{cases}$

Uguaglio i secondi membri delle equazioni $\rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 2x - 1 = \dfrac{12 - 3x}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 4x - 2 = 12 - 3x \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 7x = 14 \end{cases}$ sostituisco il valore di x trovato nella prima equazione per trovare il valore di y $\rightarrow \begin{cases} y = 2(2) - 1 = 3 \\ x = 2 \end{cases}$

$\longrightarrow$ la soluzione del sistema è $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

c) Metodo della riduzione

Dopo aver moltiplicato i due membri delle equazioni per coefficienti opportuni, sommo membro a membro le due equazioni per eliminare una delle due incognite e ricavare il valore dell'altra incognita.

Per eliminare y:

$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases} \rightarrow$ Moltiplico la prima equazione per 2 $\rightarrow \begin{matrix} 2 \\ \end{matrix} \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$ Sommo membro a membro $\rightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases} \\ \hline 7x + // \;\; = 14 \end{array}$

Per eliminare x:

$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases} \rightarrow$ Moltiplico la prima equazione per -3 e la seconda per 2 $\rightarrow \begin{matrix} -3 \\ 2 \end{matrix} \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} -6x + 3y = -3 \\ 6x + 4y = 24 \end{cases}$ Sommo membro a membro $\rightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} -6x + 3y = -3 \\ 6x + 4y = 24 \end{cases} \\ \hline // + 7y = 21 \end{array}$

$\longrightarrow$ la soluzione del sistema è $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

d) Regola di CRAMER

Scrivo il sistema in forma matriciale $AX = B \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \end{bmatrix}$

Calcolo il determinante della matrice dei coefficienti A $\longrightarrow$ $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7$

Costruisco la matrice A_x sostituendo nella matrice A la colonna dei coefficienti della x con la colonna dei termini noti e calcolo il suo determinante:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow A_x = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 12 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \det A_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 14$$

Costruisco la matrice A_y sostituendo nella matrice A la colonna dei coefficienti della y con la colonna dei termini noti e calcolo il suo determinante:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow A_y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} \longrightarrow \det A_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 21$$

Le soluzioni si ottengono facendo il rapporto tra i determinanti delle matrici così ottenute e il determinante della matrice dei coefficienti:

$$\boxed{x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{14}{7} = 2 \qquad y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{21}{7} = 3}$$

REGOLA GENERALE

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots\cdots & \cdot\cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot\cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot\cdot \\ b_n \end{bmatrix} \longrightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots\cdots & \cdot\cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots\cdots & \cdot\cdot \\ b_n & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots\cdots & \cdot\cdot \\ a_{n1} & b_n & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \ldots\ldots, \quad A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & b_2 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots\cdots & \cdot\cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & b_n \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

e) Metodo della MATRICE INVERSA

Scrivo il sistema in forma matriciale $AX = B \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \end{bmatrix}$

Poiché il determinante della matrice A è diverso da 0, tale matrice è invertibile, cioè esiste una e una sola matrice A^{-1} tale che $A^{-1} \cdot A = I$.

Se moltiplico entrambi i membri dell'uguaglianza $AX = B$ per A^{-1} ottengo

$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B$ cioè $X = A^{-1} \cdot B$

Applico il metodo della matrice inversa:

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \longrightarrow$ calcolo la **matrice inversa**

$$A^* = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow A_T^* = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{-3}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ trovo x e y: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{-3}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} + \frac{12}{7} \\ \frac{-3}{7} + \frac{24}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{7} \\ \frac{21}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

ESERCIZI

Rappresenta in forma matriciale i seguenti sistemi

1. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$ $\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

2. $\begin{cases} 2x + y + 4z = 1 \\ 3x + 4y - z = -3 \end{cases}$ $\left\langle \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\rangle$

3. $\begin{cases} 4x + 2y = -3 \\ 5x - 3y = 2 \end{cases}$ $\left\langle \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$

Rappresenta in forma normale i seguenti sistemi rappresentati in forma matriciale

4. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\quad \left\langle \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} \right\rangle$

5. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad \left\langle \begin{cases} -a + 2b + c = 0 \\ 3a + 2c = 1 \\ 2a + b + 4c = 2 \end{cases} \right\rangle$

6. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad \left\langle \begin{cases} 2a + c = 0 \\ 3a + b = 1 \\ b + 4c = 2 \end{cases} \right\rangle$

Risolvi i seguenti sistemi lineari

7. $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$ $\quad \left\langle x = -\frac{3}{7}\ y = -\frac{1}{7} \right\rangle$

8. $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ $\quad \langle x = 2\ y = -1 \rangle$

9. $\begin{cases} 3x + 4y = 15 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ $\quad \left\langle x = \frac{7}{3}\ y = 2 \right\rangle$

10. $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 5x - 4y = 1 \end{cases}$ $\quad \left\langle x = -\frac{1}{23}\ y = -\frac{7}{23} \right\rangle$

11. $\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases}$ $\quad \left\langle x = \frac{9}{7}\ y = \frac{5}{7} \right\rangle$

12. $\begin{cases} 3x - 5y = 3 \\ 5x - 4y = 1 \end{cases}$ $\quad \left\langle x = -\frac{7}{13}\ y = -\frac{12}{13} \right\rangle$

13. $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 5x + 4y = 2 \end{cases}$ $\quad \left\langle x = \frac{8}{11}\ y = -\frac{9}{22} \right\rangle$

14. $\begin{cases} 3x + 5y = 3 \\ 5x + 4y = 2 \end{cases}$ $\quad \left\langle x = -\frac{2}{13}\ y = \frac{9}{13} \right\rangle$

15. $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 5x - 3y = 2 \end{cases}$ $\quad \langle x = 10\ y = 16 \rangle$

16. $\begin{cases} 13x - 12y = -2 \\ 6x - 3y = 2 \end{cases}$ $\quad \left\langle x = \frac{10}{11}\ y = \frac{38}{33} \right\rangle$

17. $\begin{cases} 13x-12y=12 \\ 17x-13y=13 \end{cases}$ $\langle x=0\ y=-1 \rangle$

18. $\begin{cases} 7x-12y=8 \\ 8x-13y=8 \end{cases}$ $\left\langle x=-\frac{8}{5}\ y=-\frac{8}{5} \right\rangle$

19. $\begin{cases} 4x+2y=-3 \\ 5x-3y=2 \end{cases}$ $\left\langle x=-\frac{5}{22}\ y=-\frac{23}{22} \right\rangle$

20. $\begin{cases} 4x-5y+1=0 \\ 3x-2y-8=0 \end{cases}$ $\langle x=6\ y=5 \rangle$

21. $\begin{cases} x-8y=3x+1 \\ y-2x=7 \end{cases}$ $\left\langle x=-\frac{19}{6}\ y=\frac{2}{3} \right\rangle$

22. $\begin{cases} 2a+b+c=3 \\ 5a+3b=7 \\ a-3c=2 \end{cases}$ $\langle a=2\ \ b=-1\ \ c=0 \rangle$

23. $\begin{cases} a+b+c=4 \\ 5a+b+4c=-1 \\ 3a+b+3c=2 \end{cases}$ $\langle a=-2\ \ b=5\ \ c=1 \rangle$

24. $\begin{cases} 3x+2y+4z=1 \\ 2x-y+z=0 \\ x+2y+3z=1 \end{cases}$ $\left\langle x=-\frac{1}{5}\ \ y=0\ \ z=\frac{2}{5} \right\rangle$

25. $\begin{cases} a+2b+3c=2 \\ a+b-c=4 \\ 4b+5c=3 \end{cases}$ $\langle a=1\ \ b=2\ \ c=-1 \rangle$

26. $\begin{cases} 2a+b+c=3 \\ 5a+3b=7 \\ a-3c=2 \end{cases}$ $\langle a=2\ \ b=1\ \ c=2 \rangle$

27. $\begin{cases} 3a-2b+c=6 \\ 5b-2a-3c=-5 \\ a+4b-2c=2 \end{cases}$ $\langle a=2\ \ b=-1\ \ c=0 \rangle$

28. $\begin{cases} b+2c=6+2a \\ 3b-c=a+2 \\ 3a-2b+4c=11 \end{cases}$ $\langle a=1\ \ b=2\ \ c=3 \rangle$

29. $\begin{cases} x+y+z=4 \\ x-y+z=2 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$ $\quad \left\langle x=1 \;\; y=1 \;\; z=2 \right\rangle$

30. $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x-y+2z=1 \\ y+z=4 \end{cases}$ $\quad \left\langle x=-2 \;\; y=1 \;\; c=3 \right\rangle$

31. $\begin{cases} 2a-b+3c=10 \\ a+2b=c-5 \\ 5a+4b-5c=-1 \end{cases}$ $\quad \left\langle a=3 \;\; b=-4 \;\; c=0 \right\rangle$

32. $\begin{cases} a-b+c=-2 \\ a+2b-2c=4 \\ a+2b-6c=0 \end{cases}$ $\quad \left\langle a=0 \;\; b=\frac{3}{2} \;\; c=-\frac{1}{2} \right\rangle$

33. $\begin{cases} 6x+8y-25z=-10 \\ 9x+12y+20z=8 \\ 6x-8y-5z=2 \end{cases}$ $\quad \left\langle x=\frac{1}{3} \;\; y=-\frac{1}{4} \;\; z=\frac{2}{5} \right\rangle$

34. $\begin{cases} x+y-2z=2 \\ 3x+4y-z=1 \\ 4x-5y-3z=3 \end{cases}$ $\quad \left\langle x=0 \;\; y=0 \;\; z=1 \right\rangle$

35. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 12 \end{bmatrix}$ $\quad \left\langle \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$

36. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\quad \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$

37. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 15 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\quad \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \right\rangle$

38. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 11 \end{bmatrix}$ $\quad \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$